Francesco Daddi - www.webalice.it/francesco.daddi

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 1. *Calcolare il seguente integrale indefinito*

$$\int \sqrt{1-3\,x}\,dx\,.$$

<u>Soluzione.</u> Poniamo

$$t = 1-3\,x$$

da cui

$$x = \frac{1-t}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} - \frac{t}{3}$$

derivando rispetto a t abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}$$

quindi

$$\int \sqrt{1-3\,x}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt$$

poiché $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, abbiamo

$$-\frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\,(1-3\,x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\,(1-3\,x)^{\frac{3}{2}} + C$$

in definitiva:

$$\int \sqrt{1-3\,x}\,dx = -\frac{2}{9}\,\sqrt{(1-3\,x)^3} + C$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx\,.$$

<u>**Soluzione.**</u> Risolviamo l'esercizio in due modi.

- Per parti abbiamo:

$$\int \sqrt{12-x^2}\,dx = \int \sqrt{12-x^2}\cdot 1\,dx = \sqrt{12-x^2}\cdot x - \int \frac{-2\,x}{2\sqrt{12-x^2}}\cdot x\,dx =$$

$$= x\sqrt{12-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{12-x^2}}\,dx = x\sqrt{12-x^2} - \int \frac{12-x^2-12}{\sqrt{12-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{12-x^2} - \int \frac{12-x^2}{\sqrt{12-x^2}}\,dx - \int \frac{-12}{\sqrt{12-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{12-x^2} - \int \sqrt{12-x^2}\,dx + 12\int \frac{1}{\sqrt{12-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{12-x^2} - \int \sqrt{12-x^2}\,dx + 12\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2}}\,dx$$

quindi

$$\int \sqrt{12-x^2}\,dx = x\sqrt{12-x^2} - \int \sqrt{12-x^2}\,dx + 12\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)$$

da cui

$$2\int \sqrt{12-x^2}\,dx = x\sqrt{12-x^2} + 12\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\int \sqrt{12-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{12-x^2} + 6\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)$$

per quanto riguarda l'integrale definito abbiamo:

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{12-x^2} + 6\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\,\pi\,.$$

- Per sostituzione: l'integrale $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$ può essere calcolato ponendo $x = 2\sqrt{3}\cos t$:

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sqrt{12-12\cos^2 t}\cdot(-2\sqrt{3}\,\sin t)\,dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} 2\sqrt{3}\,\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot(-2\sqrt{3}\,\sin t)\,dt = -12\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin^2 t\,dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\,dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos(2\,t)}{2}\,dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1-\cos(2\,t)\,dt = 6\cdot\left[t-\frac{\sin(2\,t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\,\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\int \frac{5\,x-19}{x^2-4\,x+3}\,dx\,.$$

<u>**Soluzione.**</u> Il denominatore si scompone nel modo seguente:

$$x^2-4\,x+3=(x-1)(x-3)\,.$$

Osservazione 1. Per chi fosse in difficoltà su questo passaggio, ricordiamo che basta trovare le radici x_1 e x_2 del polinomio di secondo grado e sfruttare la formula $a\,x^2+b\,x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Cerchiamo ora i coefficienti A e B in modo tale che risulti

$$\frac{5\,x-19}{x^2-4\,x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

svolgendo i calcoli a destra abbiamo

$$\frac{5\,x-19}{x^2-4\,x+3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{x^2-4\,x+3}$$

e quindi

$$\frac{5\,x-19}{x^2-4\,x+3}=\frac{(A+B)x+(-3\,A-B)}{x^2-4\,x+3}\,;$$

a questo punto risolviamo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ -3\,A-B=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=7 \\ B=-2 \end{cases}\,.$$

Osservazione 2. Invece di risolvere il sistema lineare, è possibile seguire una scorciatoia: poiché stiamo cercando i coefficienti A e B in modo tale che $5\,x-19=A(x-3)+B(x-1)$, tale uguaglianza deve valere anche per $x=1$ e per $x=3$, per cui risulta:

$$\text{per } x=1 \;\Rightarrow\; 5\cdot 1-19=A\cdot(1-3)+B\cdot(1-1) \;\Rightarrow\; -14=-2\,A \;\Rightarrow\; A=7\,;$$
$$\text{per } x=3 \;\Rightarrow\; 5\cdot 3-19=A\cdot(3-3)+B\cdot(3-1) \;\Rightarrow\; -4=2\,B \;\Rightarrow\; B=-2\,.$$

L'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così:

$$\int \frac{5\,x-19}{x^2-4\,x+3}\,dx=\int \frac{7}{x-1}-\frac{2}{x-3}\,dx=$$

$$7\ln|x-1|-2\ln|x-3|+C\,.$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 4. *Calcolare*

$$\int \frac{2\,x^2+6\,x-8}{x^3+x^2-4\,x-4}\,dx\ .$$

__Soluzione.__ Scomponiamo il denominatore:

$$x^3+x^2-4\,x-4 = x^2(x+1)-4(x+1) = (x^2-4)(x+1)$$

ricordando che $x^2-4=(x+2)(x-2)$, abbiamo

$$x^3+x^2-4\,x-4 = (x+2)(x-2)(x+1)\ .$$

Cerchiamo ora i coefficienti A, B, C in modo tale che risulti

$$\frac{2\,x^2+6\,x-8}{x^3+x^2-4\,x-4} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

svolgendo i calcoli a destra abbiamo

$$\frac{2\,x^2+6\,x-8}{x^3+x^2-4\,x-4} = \frac{A(x-2)(x+1)+B(x+2)(x+1)+C(x+2)(x-2)}{x^3+x^2-4\,x-4}$$

e quindi

$$\frac{2\,x^2+6\,x-8}{x^3+x^2-4\,x-4} = \frac{(A+B+C)x^2+(-A+3\,B)x+(-2\,A+2\,B-4\,C)}{x^3+x^2-4\,x-4}\ ;$$

a questo punto risolviamo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -A+3\,B=6 \\ -2\,A+2\,B-4\,C=-8 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=-3 \\ B=1 \\ C=4 \end{cases}\ .$$

Osservazione. Invece di risolvere il sistema lineare, è possibile ragionare così: poiché stiamo cercando i coefficienti A, B, C in modo tale che $2\,x^2+6\,x-8 = A(x-2)(x+1)+B(x+2)(x+1)+C(x+2)(x-2)$, tale uguaglianza deve valere anche per $x=-2$, per $x=2$ e per $x=-1$, per cui risulta:

per $x=-2 \;\Rightarrow\; 2\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-8 = A(-2-2)(-2+1)+B(-2+2)(-2+1)+C(-2+2)(-2-2)$

$\Rightarrow\; -12=4\,A \;\Rightarrow\; A=-3\,;$

per $x=2 \;\Rightarrow\; 2\cdot 2^2+6\cdot 2-8 = A(2-2)(2+1)+B(2+2)(2+1)+C(2+2)(2-2)$

$\Rightarrow\; 12=12\,B \;\Rightarrow\; B=1\,;$

per $x=-1 \;\Rightarrow\; 2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)-8 = A(-1-2)(-1+1)+B(-1+2)(-1+1)+C(-1+2)(-1-2)$

$\Rightarrow\; -12=-3\,C \;\Rightarrow\; C=4\,.$

L'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così:

$$\int \frac{2\,x^2+6\,x-8}{x^3+x^2-4\,x-4}\,dx = \int -\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x+1}\,dx =$$

$$-3\ln|x+2|+\ln|x-2|+4\ln|x+1|+C\ .$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 5. *Calcolare*

$$\int \frac{4\,x^3+2\,x^2-13\,x+4}{2\,x^2-2\,x-4}\,dx\,.$$

Soluzione. Per prima cosa, dato che il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore, dobbiamo eseguire la divisione polinomiale (si trova che il quoziente è $2\,x+3$ ed il resto è $x+16$):

$$\frac{4\,x^3+2\,x^2-13\,x+4}{2\,x^2-2\,x-4} = 2\,x+3+\frac{x+16}{2\,x^2-2\,x-4}\,.$$

Occupiamoci ora della frazione algebrica $\dfrac{x+16}{2\,x^2-2\,x-4}$; visto che la scomposizione del denominatore è $2\,x^2-2\,x-4 = 2(x+1)(x-2)$, cerchiamo i coefficienti A e B in modo tale che risulti

$$\frac{x+16}{2\,x^2-2\,x-4} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot\frac{x+16}{x^2-x-2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A(x-2)+B(x+1)}{x^2-x-2}\right)$$

moltiplicando entrambi i membri per 2 si ottiene

$$\frac{x+16}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x+(-2\,A+B)}{x^2-x-2}\,;$$

a questo punto risolviamo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2\,A+B=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases}\,.$$

Osservazione. Invece di risolvere il sistema lineare, è possibile seguire una scorciatoia: poiché stiamo cercando i coefficienti A e B in modo tale che $x+16 = A(x-2)+B(x+1)$, tale uguaglianza deve valere anche per $x=-1$ e per $x=2$, per cui risulta:

$$\text{per } x=-1 \;\Rightarrow\; -1+16 = A\cdot(-1-2)+B\cdot(-1+1) \;\Rightarrow\; 15=-3\,A \;\Rightarrow\; A=-5\,;$$
$$\text{per } x=2 \;\Rightarrow\; 2+16 = A\cdot(2-2)+B\cdot(2+1) \;\Rightarrow\; 18=3\,B \;\Rightarrow\; B=6\,.$$

L'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così:

$$\int \frac{4\,x^3+2\,x^2-13\,x+4}{2\,x^2-2\,x-4}\,dx = \int 2\,x+3+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+16}{x^2-x-2}\,dx =$$

$$\int 2\,x+3\,dx+\frac{1}{2}\cdot\int -\frac{5}{x+1}+\frac{6}{x-2}\,dx =$$

$$2\cdot\frac{x^2}{2}+3\,x+\frac{1}{2}\cdot\big(-5\ln|x+1|+6\ln|x-2|\big)+C =$$

$$x^2+3\,x-\frac{5}{2}\ln|x+1|+3\ln|x-2|+C\,.$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 6. *Calcolare*

$$\int \frac{3\,x^4 - 2\,x^3 - 26\,x^2 + 3\,x + 61}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12}\,dx\,.$$

Soluzione. Per prima cosa, dato che il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore, dobbiamo eseguire la divisione polinomiale (si trova che il quoziente è $3\,x - 5$ ed il resto è $3\,x^2 - x + 1$):

$$\frac{3\,x^4 - 2\,x^3 - 26\,x^2 + 3\,x + 61}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12} = 3\,x - 5 + \frac{3\,x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12}\,.$$

Occupiamoci ora della frazione algebrica $\dfrac{3\,x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12}$; visto che la scomposizione del denominatore è $x^3 + x^2 - 8\,x - 12 = (x-3)(x+2)^2$, cerchiamo i coefficienti A, B, C in modo tale che risulti

$$\frac{3\,x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

svolgendo i calcoli a destra abbiamo

$$\frac{3\,x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3\,x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12} = \frac{(A+B)x^2 + (4\,A - B + C)x + (4\,A - 6\,B - 3\,C)}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12}\,;$$

a questo punto risolviamo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 4\,A - B + C = -1 \\ 4\,A - 6\,B - 3\,C = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -3 \end{cases}\,.$$

Osservazione. Invece di risolvere il sistema lineare, è possibile seguire una scorciatoia: poiché stiamo cercando i coefficienti A, B, C in modo tale che $3\,x^2 - x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)$, tale uguaglianza deve valere anche per $x = 3$ e per $x = -2$, per cui risulta:

per $x = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (3)^2 - 3 + 1 = A \cdot (3+2)^2 + B \cdot (3-3)(3+2) + C(3-3)$

$\Rightarrow \quad 25 = 25\,A \quad \Rightarrow \quad A = 1\,;$

per $x = -2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 1 = A \cdot (-2+2)^2 + B \cdot (-2-3)(-2+2) + C(-2-3)$

$\Rightarrow \quad 15 = -5\,C \quad \Rightarrow \quad C = -3\,;$

per determinare B basta sostituire nell'equazione $3\,x^2 - x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)$ $x = 0$ (ma va bene anche un qualsiasi numero diverso da 3 e da -2) ed i valori già trovati per A e C:

$$3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1 \cdot (0+2)^2 + B \cdot (0-3)(0+2) - 3 \cdot (0-3) \quad \Rightarrow \quad 1 = 4 - 6\,B + 9 \quad \Rightarrow \quad B = 2\,.$$

L'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così:

$$\int \frac{3\,x^4 - 2\,x^3 - 26\,x^2 + 3\,x + 61}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12}\,dx = \int 3\,x - 5 + \frac{3\,x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 8\,x - 12}\,dx =$$

$$\int 3\,x - 5 + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$\frac{3}{2}\,x^2 - 5\,x + \ln|x-3| + 2\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C\,.$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 7. *Calcolare*

$$\int \frac{x^3+7\,x^2-17\,x+3}{2\,x^4-8\,x^3+12\,x^2-8\,x+2}\,dx\ .$$

Soluzione. Scomponiamo il denominatore:

$$2\,x^4-8\,x^3+12\,x^2-8\,x+2 = 2\,(x-1)^4$$

cerchiamo i coefficienti A, B, C, D in modo tale che risulti

$$\frac{x^3+7\,x^2-17\,x+3}{2\,x^4-8\,x^3+12\,x^2-8\,x+2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x-1)^4}\right)$$

svolgendo i calcoli a destra abbiamo

$$\frac{x^3+7\,x^2-17\,x+3}{2\,x^4-8\,x^3+12\,x^2-8\,x+2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D}{(x-1)^4}\right)\ ;$$

moltiplicando entrambi i membri per 2 si ottiene

$$\frac{x^3+7\,x^2-17\,x+3}{x^4-4\,x^3+6\,x^2-4\,x+1} = \frac{A\,x^3+(-3\,A+B)x^2+(3\,A-2\,B+C)x+(-A+B-C+D)}{x^4-4\,x^3+6\,x^2-4\,x+1}\ ;$$

a questo punto risolviamo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} A=1 \\ -3\,A+B=7 \\ 3\,A-2\,B+C=-17 \\ -A+B-C+D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=10 \\ C=0 \\ D=-6 \end{cases}.$$

L'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così:

$$\int \frac{x^3+7\,x^2-17\,x+3}{2\,x^4-8\,x^3+12\,x^2-8\,x+2}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}+\frac{10}{(x-1)^2}-\frac{6}{(x-1)^4}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\ln|x-1|-\frac{10}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)+C =$$

$$\frac{1}{2}\,\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^3}+C\ .$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 8. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{x^2+5\,x+7}\,dx\,.$$

Soluzione. Il polinomio a denominatore non ha radici reali (risulta $\Delta = -3 < 0$); con la tecnica del completamento del quadrato possiamo scrivere:

$$x^2+5\,x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\,.$$

Osservazione. In generale, se il polinomio $a\,x^2+b\,x+c$ non ha radici reali, è possibile scriverlo nel modo seguente:

$$a\,x^2+b\,x+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4\,a^2}\right]\,.$$

Ricordando la formula

$$\int \frac{1}{(x+m)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\,\arctan\left(\frac{x+m}{k}\right)+C\,,$$

l'integrale iniziale, dunque, può essere calcolato così:

$$\int \frac{1}{x^2+5\,x+7}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\arctan\left(\frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

semplificando si trova

$$\int \frac{1}{x^2+5\,x+7}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\,x+5}{\cancel{2}}\right)+C\,.$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2+5\,x+7}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2\,x+5}{\sqrt{3}}\right)+C\,.$$

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 9. *Calcolare*

$$\int \frac{5\,x-8}{x^2+2\,x+5}\,dx\ .$$

Soluzione. Poiché il polinomio a denominatore non ha radici reali (risulta $\Delta=-3<0$), l'idea di base è quella di riscrivere la funzione integranda come somma di due addendi, di cui uno avente al numeratore la derivata del denominatore, l'atro avente come numeratore una costante. Poiché dobbiamo avere $2\,x+2$ al numeratore, per ottenere $2\,x$ dobbiamo moltiplicare $\frac{2}{5}$ e, per pareggiare i conti, moltiplichiamo fuori per $\frac{5}{2}$:

$$\int \frac{5\,x-8}{x^2+2\,x+5}\,dx=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2}{5}\cdot\frac{5\,x-8}{x^2+2\,x+5}\,dx=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2\,x-\frac{16}{5}}{x^2+2\,x+5}\,dx\ ;$$

a questo punto sommiamo e sottraiamo 2 al numeratore:

$$\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2\,x+2-2-\frac{16}{5}}{x^2+2\,x+5}\,dx=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2\,x+2}{x^2+2\,x+5}\,dx+\frac{5}{2}\cdot\int\frac{-2-\frac{16}{5}}{x^2+2\,x+5}\,dx=$$

$$\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2\,x+2}{x^2+2\,x+5}\,dx-13\int\frac{1}{x^2+2\,x+5}\,dx$$

il primo integrale è molto semplice (si risolve con il logaritmo), mentre per il secondo dobbiamo, con la tecnica del completamento del quadrato, riscrivere il denominatore:

$$x^2+2\,x+5=(x+1)^2-1+5=(x+1)^2+4=(x+1)^2+(2)^2\ .$$

Ricordando la formula $\displaystyle\int\frac{1}{(x+m)^2+k^2}\,dx=\frac{1}{k}\ \arctan\left(\frac{x+m}{k}\right)+C$, abbiamo

$$\int \frac{5\,x-8}{x^2+2\,x+5}\,dx=\frac{5}{2}\ \ln(x^2+2\,x+5)-13\cdot\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]+C=$$

$$\frac{5}{2}\ \ln(x^2+2\,x+5)-\frac{13}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C\ .$$

Osservazione. Non è necessario mettere il valore assoluto all'argomento del logaritmo, in quanto $x^2+2\,x+5>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Esercizi svolti sugli integrali

Esercizio 10. *Calcolare*

$$\int x^3 \sin x \, dx \; .$$

Soluzione. Assumiamo come fattore finito x^3 e come fattore differenziale $\sin x$:

$$\int x^3 \sin x \, dx = x^3 \cdot (-\cos x) - \int 3\,x^2 \cdot (-\cos x) \, dx =$$

quindi

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx \; . \quad (*)$$

Integrando ora per parti $x^2 \cos x$ considerando come fattore finito x^2 e come fattore differenziale $\cos x$, si trova:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2\,x \cdot \sin x \, dx \; ;$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \; ; \quad (**)$$

infine, integrando $x \sin x$ (sempre per parti, con x fattore finito e $\sin x$ fattore differenziale), si ha:

$$\int x \sin x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x \; . \quad (***)$$

Riprendendo l'integrale (*), con la formula (**) possiamo scrivere:

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \left(x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \right) =$$

$$= -x^3 \cos x + 3\,x^2 \sin x - 6 \int x \sin x \, dx \; ;$$

infine, mediante la formula (***), si trova:

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3\,x^2 \sin x - 6\,(-x \cos x + \sin x) + C =$$

$$= -x^3 \cos x + 3\,x^2 \sin x + 6\,x \cos x - 6 \sin x + C \; .$$