Esercizio 1 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 1. *Determinare la proiettività di* $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ *che lascia fissi i punti* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *e che manda il punto* $(3,2)$ *nel punto* $(1,1)$.

Abbiamo

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} a = k_1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = k_2 \\ 3\,a + 2\,c = 1 \\ 3\,b + 2\,d = 1 \end{cases}$$

troviamo le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{2} \\ k_1 = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui ricaviamo l'espressione della matrice che rappresenta la proiettività:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ;$$

possiamo anche scrivere (moltiplicando la matrice per 6):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Esercizio 2 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 2. *Determinare l'espressione della proiettività di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *che (in coordinate proiettive) manda i punti* $(1,1,-2)$, $(0,1,1)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,1)$ *rispettivamente in* $(1,2,-3)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(3,0,2)$.

Determiniamo le proiettività T_1 e T_2 tali che:

$$T_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad T_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$T_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad T_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad T_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

per T_1 si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre per T_2 si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{9}{8} & \frac{13}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{8} & -\frac{13}{8} \\ -\frac{3}{4} & \frac{9}{8} & \frac{13}{8} \end{pmatrix}$$

poiché la matrice che rappresenta una proiettività è definita a meno di multipli $\neq 0$, T_2 è rappresentata dalla matrice seguente (ottenuta moltiplicando per 8):

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 13 \\ 4 & 9 & -13 \\ -6 & 9 & 13 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamoci l'inversa (a meno di fattori moltiplicativi) della matrice che rappresenta T_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a questo punto, per avere la matrice che rappresenta $T_2 \circ T_1^{-1}$, è sufficiente calcolare il seguente prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 13 \\ 4 & 9 & -13 \\ -6 & 9 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 213 & -39 & 75 \\ 3 & 39 & -3 \\ 117 & -39 & 75 \end{pmatrix} .$$

La proiettività ha le seguenti equazioni:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 213 & -39 & 75 \\ 3 & 39 & -3 \\ 117 & -39 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 3 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 3. *Determinare i punti fissi e le rette invarianti della proiettività rappresentata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Cerchiamo i punti (x_1, x_2, x_3) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico della matrice risulta

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$

possiamo fattorizzare il polinomio nel modo seguente:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 \; ;$$

svolgendo i calcoli troviamo

$$V_{\lambda=1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad ; \quad V_{\lambda=-1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la proiettività ha due punti fissi: $(3, 3, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Una retta invariante è la retta passante per i due punti fissi, la cui equazione è

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 3 & 1 \\ x_2 & 3 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \; ;$$

si osservi che questa retta ($x_1 = x_2$) non è una retta di punti fissi (solo $(3, 3, 1)$ e $(1, 1, 1)$ sono fissi).
Determiniamo ora le altre rette invarianti.

Primo metodo. La retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ deve avere per immagine la retta $a\,x'_1 + b\,x'_2 + c\,x'_3 = 0$. Dal momento che la proiettività inversa è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} ,$$

l'immagine della retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ ha equazione

$$a(-x'_1 + 3\,x'_2 - 3\,x'_3) + b(2\,x'_2 - 3\,x'_3) + c(-x'_1 + 2\,x'_2 - 2\,x'_3) = 0$$

$$(-a-c)x_1' + (3\,a + 2\,b + 2\,c)x_2' + (-3\,a - 3\,b - 2\,c)x_3' = 0$$

arriviamo al sistema seguente:

$$\begin{cases} -a - c = ka \\ 3\,a + 2\,b + 2\,c = kb \\ -3\,a - 3\,b - 2\,c = kc \end{cases}$$

i valori di k per cui si hanno soluzioni non nulle sono $k = 1$ e $k = -1$:

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0$$

$$k = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0$$

abbiamo quindi ritrovato la retta passante per i due punti fissi della proiettività. La retta $x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0$ passa per $(1, 1, 1)$ (punto fisso relativo all'autovalore con molteplicità algebrica $= 2$).

Secondo metodo. La retta $a\,x_1' + b\,x_2' + c\,x_3' = 0$ deve avere come controimmagine la retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ e quindi:

$$a\,x_1' + b\,x_2' + c\,x_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad a(2\,x_1 - 3\,x_3) + b(3\,x_1 - x_2 - 3\,x_3) + c(2\,x_1 - x_2 - 2\,x_3) = 0$$

si ricava la retta

$$(2\,a + 3\,b + 2\,c)x_1 + (-b - c)x_2 + (-3\,a - 3\,b - 2\,c)x_3 = 0\ ;$$

poiché questa retta deve coincidere con la retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ deve risultare:

$$\begin{cases} 2\,a + 3\,b + 2\,c = k\,a \\ -b - c = k\,b \\ -3\,a - 3\,b - 2\,c = k\,c \end{cases}$$

i valori di k per cui tale sistema ammette soluzioni non nulle sono $k = 1$ e $k = -1$:

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0$$

$$k = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0$$

abbiamo ritrovato i risultati ottenuti con il primo metodo.

Esercizio 4 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 4. *Determinare i punti fissi e le rette unite della proiettività rappresentata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 8 & -9 & -21 \\ 6 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico della matrice è

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 4$$

che ammette la seguente fattorizzazione:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \;;$$

determiniamo gli autospazi della matrice:

$$V_{\lambda=-1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \;;\; V_{\lambda=2} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \;;$$

i punti fissi sono $(1,1,0)$ e la retta proiettiva r passante per i punti $(3,2,0)$ e $(7,0,2)$:

$$r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

per la retta r troviamo l'equazione cartesiana $2\,x_1 - 3\,x_2 - 7\,x_3$.
Le altre rette invarianti sono le tutte le rette passanti per il punto fisso $(1,1,0)$ e per un punto qualsiasi della retta (fissa punto per punto) r. Controlliamo se con i calcoli otteniamo quanto affermato. La retta $a\,x'_1 + b\,x'_2 + c\,x'_3 = 0$ deve avere come controimmagine la retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$:

$$a\,x'_1 + b\,x'_2 + c\,x'_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a(8\,x_1 - 9\,x_2 - 21\,x_3) + b(6\,x_1 - 7\,x_2 - 21\,x_3) + c(2\,x_3) = 0$$

e quindi

$$(8\,a + 6\,b)x_1 + (-9\,a - 7\,b)x_2 + (-21\,a - 21\,b + 2\,c)x_3 = 0$$

poiché questa retta deve coincidere con $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$, arriviamo al sistema seguente:

$$\begin{cases} 8\,a + 6\,b = k\,a \\ -9\,a - 7\,b = k\,b \\ -21\,a - 21\,b + 2\,c = k\,c \end{cases}$$

i valori di k per cui il sistema ammette soluzioni non nulle sono $k = -1$ e $k = 2$:

$$k = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2\,x_1 - 3\,x_2 - 7\,x_3 = 0$$

abbiamo ritrovato quindi la retta fissa punto per punto; se $k = 2$ invece:

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t_1\,x_1 - t_1\,x_2 + (t_2 - 2\,t_1)x_3 = 0 \;;$$

in questo caso si ottengono, come già anticipato, tutte le rette che passano per il punto fisso $(1,1,0)$ e per un punto qualsiasi della retta (fissa punto per punto) r.

Esercizio 5 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 5. *Determinare i punti fissi e le rette invarianti della proiettività rappresentata dalla seguente matrice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$$

esiste un solo autovalore, con molteplicità algebrica uguale a 3; risulta:

$$V_{\lambda=1} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

esiste quindi un unico punto fisso per la proiettività: $(0, 1, 0)$. Possiamo quindi già affermare che non ci sono rette fisse punto per punto.
Cerchiamo ora le rette invarianti.
<u>Primo metodo.</u> Le rette invarianti del tipo $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$; la proiettività inversa è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

per cui

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a(x'_1 - 2\,x'_3) + b(-x'_1 + x'_2 + x'_3) + c(x'_3) = 0$$

e quindi

$$(a - b)x'_1 + bx'_2 + (-2\,a + b + c)x'_3 = 0 \;;$$

arriviamo quindi al sistema seguente:

$$\begin{cases} a - b = k\,a \\ b = k\,b \\ -2\,a + b + c = k\,c \end{cases}$$

il valore di k per cui si hanno soluzioni non nulle è $k = 1$; per tale valore ricaviamo

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

esiste dunque una sola retta invariante: $x_3 = 0$.
<u>Secondo metodo.</u> La retta $a\,x'_1 + b\,x'_2 + c\,x'_3 = 0$ deve avere come controimmagine la retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ e quindi:

$$a\,x'_1 + b\,x'_2 + c\,x'_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a(x_1 + 2\,x_3) + b(x_1 + x_2 + x_3) + c(x_3) = 0$$

si ricava la retta

$$(a+b)x_1 + b\,x_2 + (2\,a+b+c)x_3 = 0$$

poiché questa retta deve coincidere con la retta $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ deve risultare:

$$\begin{cases} a+b = k\,a \\ b = k\,b \\ 2\,a+b+c = k\,c \end{cases}$$

l'unico valore di k per cui tale sistema ammette soluzioni non nulle è $k=1$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

abbiamo così ritrovato il risultato ottenuto con il primo metodo.

Esercizio 6 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 6. *Determinare i punti fissi e le rette invarianti per la proiettività di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *rappresentata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(\lambda+3)(\lambda^2 - 2\,\lambda + 2)$; l'unica radice reale è $\lambda = -3$ e risulta:

$$V_{\lambda=-3} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

la proiettività ha un unico punto fisso: $(1, 0, 0)$; non esistono pertanto rette fisse punto per punto. Cerchiamo ora le rette invarianti nella forma $a\,x_1' + b\,x_2' + c\,x_3' = 0$; la proiettività ha equazione

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

per cui abbiamo:

$$a\,x_1' + b\,x_2' + c\,x_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad a(-3\,x_1 - x_3) + b(x_2 + x_3) + c(-x_2 + x_3) = 0$$

e quindi

$$(-3\,a)x_1 + (b - c)x_2 + (-a + b + c)x_3 = 0$$

arriviamo perciò al sistema

$$\begin{cases} -3\,a = k\,a \\ b - c = k\,b \\ -a + b + c = k\,c \end{cases}$$

l'unico valore reale di k per cui si hanno soluzioni non nulle è $k = -3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 17\,x_1 + x_2 + 4\,x_3 = 0\ .$$

Esiste dunque un'unica retta invariante, di equazione $17\,x_1 + x_2 + 4\,x_3 = 0$.

Esercizio 7 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 7. *Determinare i punti fissi e le rette invarianti per la proiettività*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$; abbiamo quindi tre punti fissi: $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 5, 2)$ e $C = (4, -5, 3)$. Le rette invarianti sono le rette r_{AB}, r_{AC} e r_{BC}:

$$r_{AB} : 3\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ \ ; \ \ r_{AC} : 2\,x_1 + x_2 - x_3 = 0 \ \ ; \ \ r_{BC} : 5\,x_1 + x_2 - 5\,x_3 = 0 \ .$$

Si osservi che le tre rette non sono fisse punto per punto.

Esercizio 8 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 8. *Dare un esempio di proiettività di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ avente due punti P, Q fissi ma la retta passante per essi non è fissa punto per punto.*

Basta considerare la seguente proiettività:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

posto $P(1,0,0)$ e $Q(0,0,1)$, abbiamo:

$$\varphi(P) = P \ \ ; \ \ \varphi(Q) = Q$$

la retta r passante per P e Q (di equazione $r : x_2 = 0$) è una retta invariante; se consideriamo il punto $A(1,0,1)$, esso appartiene alla retta r e risulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ ;$$

il punto A ha immagine su r (infatti $(1,0,2) \in r$) ma non è un punto fisso per la proiettività φ.

Esercizio 9 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 9. *Determinare l'immagine della retta* $r : x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 0$ *mediante la proiettività rappresentata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primo metodo. La proiettività agisce nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

calcoliamo la proiettività inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a questo punto sostituiamo nell'equazione di r le espressioni di x_1, x_2 e x_3:

$$x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad (x_1' + x_2' - x_3') - (x_2' - x_3') + 2(-x_1' + x_3') = 0$$

semplificando otteniamo l'equazione della retta r' immagine di r (si noti che abbiamo cambiato di segno):

$$r' : x_1' - 2\,x_3' = 0\ .$$

Secondo metodo. Calcoliamo l'immagine di due punti $\in r$, ad esempio $(1,1,0)$ e $(2,0,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a questo punto determiniamo l'equazione della retta passante per i punti $(0,1,0)$ e $(2,1,1)$:

$$\det \begin{pmatrix} x_1' & 0 & 2 \\ x_2' & 1 & 1 \\ x_3' & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1' - 2\,x_3' = 0\ .$$

Esercizio 10 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 10. *E' data la conica* $x^2 + 2\,y^2 = 1$*; scrivere l'equazione in coordinate omogenee e determinarne l'immagine mediante la proiettività rappresentata da:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'equazione della conica in coordinate omogenee è:

$$x_1^2 + 2\,x_2^2 - x_3^2 = 0 \; .$$

Scriviamo l'equazione della proiettività inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ;$$

a questo punto, per determinare l'immagine della conica, è sufficiente sostituire al posto delle variabili x_1, x_2 e x_3 le espressioni date dalla proiettività:

$$x_1^2 + 2\,x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1' + x_2' - x_3')^2 + 2(x_2' - x_3')^2 - (-x_1' + x_3')^2 = 0$$

svolgendo i calcoli algebrici e semplificando arriviamo all'equazione della curva immagine:

$$2\,x_1'x_2' + 3\,(x_2')^2 - 6\,x_2'x_3' + 2\,(x_3')^2 = 0$$

in coordinate non omogenee abbiamo:

$$2\,xy + 3\,y^2 - 6\,y + 2 = 0 \; ;$$

si tratta di un'iperbole non degenere.

Esercizio 11 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 11. *E' assegnata la conica* $x^2 - y^2 + x - 1 = 0$*; determinarne la controimmagine mediante la proiettività rappresentata dalla matrice seguente:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'equazione della conica in coordinate omogenee è:

$$(x_1')^2 - (x_2')^2 + x_1'x_3' - (x_3')^2 = 0 \; ;$$

(si osservi che abbiamo messo gli apici in quanto dobbiamo determinare la controimmagine). La proiettività agisce in questo modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

poiché la conica immagine, in coordinate omogenee ha equazione $(x_1')^2 - (x_2')^2 + x_1'x_3' - (x_3')^2 = 0$, è sufficiente sostituire al posto delle variabili x_1', x_2' e x_3' le espressioni fornite dalla proiettività:

$$(-x_3)^2 - (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (-x_3)(3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3) - (3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3)^2 = 0$$

ovvero

$$-2\,x_3^2 - 10\,x_1^2 - 10\,x_1x_2 - 7\,x_1x_3 - 5\,x_2^2 - 8\,x_2x_3 = 0$$

e, passando a coordinate non omogenee, ricaviamo:

$$10\,x^2 + 10\,xy + 5\,y^2 + 7\,x + 8\,y + 2 = 0 \; ;$$

si tratta di un'ellisse reale.

Esercizio 12 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 12. *Sono assegnate in* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *le rette* $r_1 : x_1 - x_3 = 0$, $r_2 : x_1 - x_2 = 0$ *e* $r_3 : 2\,x_1 - x_3 = 0$ *e il punto* $P(1, 2, 0)$. *Determinare la proiettività* φ *di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *definita dalle seguenti condizioni:*

$$\varphi(r_1) = r_2 \;\; ; \;\; \varphi(r_2) = r_3 \;\; ; \;\; \varphi(r_3) = r_1 \;\; ; \;\; \varphi(P) = P \; .$$

Le tre rette hanno intersezione vuota in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dal momento che risulta:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \; ;$$

cerchiamo le intersezioni $r_1 \cap r_2$, $r_2 \cap r_3$ e $r_1 \cap r_3$:

$$Q_{12} = r_1 \cap r_2 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \;\; \Rightarrow \;\; Q_{12}(1, 1, 1)$$

$$Q_{23} = r_2 \cap r_3 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2\,x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \;\; \Rightarrow \;\; Q_{23}(1, 1, 2)$$

$$Q_{13} = r_1 \cap r_2 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2\,x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \;\; \Rightarrow \;\; Q_{13}(0, 1, 0)$$

le immagini dei punti Q_{12}, Q_{23} e Q_{13} devono essere le seguenti:

$$\varphi(Q_{12}) = Q_{23} \;\; ; \;\; \varphi(Q_{23}) = Q_{13} \;\; ; \;\; \varphi(Q_{13}) = Q_{12}$$

svolgendo i calcoli arriviamo alla seguente rappresentazione della proiettività:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ,$$

con $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = -1$ e $k_3 = 2$. Possiamo rappresentare la proiettività anche nel modo seguente (dopo aver moltiplicato per 2 la matrice):

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; .$$

Esercizio 13 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 13. *Determinare, se esiste, una proiettività che lascia fissa la retta* $r : x_1 - x_2 = 0$ *(non necessariamente tutti i suoi punti), tutti i punti di* $s : x_3 = 0$ *e tale che il punto* $(0, 1, 1)$ *abbia immagine* $(1, 2, 1)$.

Scegliamo due punti di $s : x_3 = 0$, ad esempio $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ e scegliamo due punti di $r : x_1 - x_2 = 0$, ad esempio $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$; deve risultare:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i fattori moltiplicativi devono essere uguali in quanto la retta r è una retta di punti fissi; inoltre possiamo supporre che il fattore sia uguale a 1); a questo punto possiamo scrivere che la matrice che rappresenta la proiettività ha la seguente struttura:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad ;$$

ora analizziamo le altre condizioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r \quad \text{infatti si ha automaticamente } x_1 - x_2 = 0 \; ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in r \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

ora, posto $b = a$, non resta che imporre l'ultima condizione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} a = k \\ a + 1 = 2\,k \\ c = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

e quindi otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 14 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 14. *Determinare la controimmagine di* $(3, -2)$ *mediante la proiettività rappresentata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Deve risultare

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}\,k \\ x_2 = -\dfrac{11}{10}\,k \end{cases}$$

la controimmagine ha le seguenti coordinate omogenee: $(8, -11)$ (abbiamo preso $k = 10$ per avere coordinate intere).

Esercizio 15 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 15. *Determinare l'espressione delle proiettività di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *che fissano punto per punto la retta* $r : x_1 = x_2$ *e che mandano* $(1, 0, 0)$ *in* $(2, 3, -1)$.

Una proiettività con le proprietà descritte deve fissare due punti della retta r, ad esempio $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ (dobbiamo mettere lo stesso coefficiente moltiplicativo in quanto la retta è fissa punto per punto); dobbiamo quindi avere (per l'immagine del punto $(1, 0, 0)$ è stato scelto il fattore moltiplicativo uguale a 1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

arriviamo quindi al sistema lineare

$$\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = k \\ a_{11} + a_{12} = k \\ a_{21} + a_{22} = k \\ a_{31} + a_{32} = 0 \\ a_{11} = 2 \\ a_{21} = 3 \\ a_{31} = -1 \end{cases}$$

da cui abbiamo l'espressione delle matrici che rappresentano le proiettività:

$$\begin{pmatrix} 2 & k-2 & 0 \\ 3 & k-3 & 0 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad ;$$

si osservi che $k \neq 0$.

Esercizio 16 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 16. *Dire se la retta $r : x_1 - 2\,x_2 = 0$ è fissa punto per punto mediante la proiettività φ rappresentata dalla matrice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $A(2,1,0)$ r; se r è fissa punto per punto, A deve essere punto fisso per φ. Vediamo allora l'immagine del punto A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

poiché il vettore $(1,1,2)^T$ non è proporzionale al vettore $(2,1,0)^T$, il punto A non è fisso per φ. Da ciò discende che la retta r non è fissa punto per punto.

Non solo, ma possiamo anche affermare che la retta r non è neanche invariante, dal momento che il punto $(1,1,2)$ non appartiene a r.

Esercizio 17 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 17. *Determinare l'immagine del punto improprio* $(1, 3, 0)$ *mediante l'affinità*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\,x + y - 4 \\ x - y + 1 \end{pmatrix} .$$

L'affinità può essere rappresentata nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ora possiamo determinare l'immagine del punto $(1, 3, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'affinità manda il punto $(1, 3, 0)$ nel punto $(5, -2, 0)$.

Esercizio 18 sulle proiettività - Francesco Daddi

25 giugno 2009

Esercizio 18. *Determinare l'immagine del punto improprio* $(3,2,0)$ *mediante la rotazione di 90 gradi in senso antiorario attorno al punto* $C(4,-7)$.

Non è necessario svolgere calcoli; si tratta di un'affinità per cui la retta dei punti impropri è invariante. Non solo, ma possiamo affermare che l'immagine è il punto $(2,-3,0)$ (si osservi, infatti, che si tratta di una rotazione di 90 gradi). I calcoli confermano quanto abbiamo appena detto:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 19 sulle proiettività - Francesco Daddi

maggio 2010

Esercizio 19. *Determinare la proiettività φ tale che:*

$$\varphi : (1,0,1) \mapsto (1,1,1) \ \ ; \ \ \varphi : (1,1,1) \mapsto (2,1,1) \ \ ;$$

$$\varphi : (-1,1,0) \mapsto (1,0,1) \ \ ; \ \ \varphi(\{x_1 = 0\}) = \{x_3 = 0\} \ .$$

Soluzione. Le prime tre condizioni ci indicano che la proiettività è rappresentata nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \text{con } \ k_1, k_2, k_3 \neq 0$$

(si osservi che la matrice a sinistra ha per colonne le coordinate delle immagini, mentre la matrice a destra ha per colonne le coordinate dei vettori di partenza); svolgendo i calcoli troviamo:

$$\begin{pmatrix} -k_1 + 2\,k_2 - k_3 & -k_1 + 2\,k_2 & 2\,k_1 - 2\,k_2 + k_3 \\ -k_1 + k_2 & -k_1 + k_2 & 2\,k_1 - k_2 \\ -k_1 + k_2 - k_3 & -k_1 + k_2 & 2\,k_1 - k_2 + k_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ora dobbiamo concentrarci sull'ultima condizione, ovvero $\varphi(\{x_1 = 0\}) = \{x_3 = 0\}$; prendiamo $(0, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (è un punto generico appartenente alla retta $x_1 = 0$) e calcoliamo la sua immagine:

$$\begin{pmatrix} -k_1 + 2\,k_2 - k_3 & -k_1 + 2\,k_2 & 2\,k_1 - 2\,k_2 + k_3 \\ -k_1 + k_2 & -k_1 + k_2 & 2\,k_1 - k_2 \\ -k_1 + k_2 - k_3 & -k_1 + k_2 & 2\,k_1 - k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-k_1 + 2\,k_2)\,b + (2\,k_1 - 2\,k_2 + k_3)\,c \\ (-k_1 + k_2)\,b + (2\,k_1 - k_2)\,c \\ (-k_1 + k_2)\,b + (2\,k_1 - k_2 + k_3)\,c \end{pmatrix}$$

affinché l'immagine appartenga alla retta $x_3 = 0$, la terza coordinata deve essere nulla per ogni scelta di b e c, ovvero deve risultare:

$$\begin{cases} -k_1 + k_2 = 0 \\ 2\,k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -t \\ k_2 = -t \\ k_3 = t \end{cases} \quad \text{con } t \neq 0 \quad (\text{ricordiamo che i } k_j \text{ sono } \neq 0)$$

sostituendo i risultati nella matrice (1) troviamo:

$$\begin{pmatrix} -2\,t & -t & t \\ 0 & 0 & -t \\ -t & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \neq 0$$

ponendo $t = -1$ la proiettività è rappresentata dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 20 sulle proiettività - Francesco Daddi

maggio 2010

Esercizio 20. *Determinare tutte le proiettività di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *tali che trasformano la retta* $r : x_1 = 0$ *nella retta* $r' : x_3 = 0$*, lasciano fissi tutti i punti della retta* $s : x_1 = x_3$ *e mandano il punto* $(-2, -3, 1)$ *nel punto* $(2, 1, 3)$.

Poiché il punto $(0, 1, 0) \in r \cap s$ deve essere fisso (scegliamo il fattore moltiplicativo $= 1$) e l'immagine di $(0, 0, 1) \in r$ deve avere immagine in $x_3 = 0$, la matrice che rappresenta la proiettività ha la seguente struttura:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & 1 & e \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(si osservi che tutti i punti della retta $x_1 = 0$ hanno per immagine punti di $x_3 = 0$). A questo punto dobbiamo imporre che $(1, 0, 1) \in s$ sia fisso (scegliamo lo stesso fattore moltiplicativo preso per $(0, 1, 0)$, cioè 1, in quanto la retta s è una retta costituita da punti fissi per la proiettività):

$$\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & 1 & e \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ b + e = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 - a \\ e = -b \\ c = 1 \end{cases}$$

infine dobbiamo imporre che l'immagine di $(-2, -3, 1)$ sia $(2, 1, 3)$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ b & 1 & -b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} -2\,a + 1 - a = 2\,k \\ -2\,b - 3 - b = k \\ -2 = 3\,k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{9} \\ b = -\dfrac{7}{9} \\ k = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

si trova la seguente proiettività (unica con le proprietà richieste):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} & 1 & \frac{7}{9} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

possiamo anche scriverla in questo modo (moltiplicando per 9):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -7 & 9 & 7 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 21 sulle proiettività - Francesco Daddi

maggio 2010

Esercizio 21. *Determinare la proiettività di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *tale che abbia come punti fissi* $A(1,0,0)$, $B(1,0,1)$ *e* $C(1,1,0)$ *e mandi il punto* $D(1,2,1)$ *nel punto* $E(0,1,2)$.

Scriviamo le matrici 3×3 che hanno $(1,0,0)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ come autovettori relativi ad autovettori $k_j \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{con } \ k_1, k_2, k_3 \neq 0$$

si ottengono le matrici

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1+k_3 & -k_1+k_2 \\ 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

ora non resta che imporre l'ultima condizione, ovvero il punto D deve avere come immagine il punto E (mettiamo il fattore moltiplicativo uguale a 1):

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1+k_3 & -k_1+k_2 \\ 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2\,k_1 + 2\,k_3 + k_2 = 0 \\ 2\,k_3 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} k_1 = \dfrac{3}{2} \\ k_2 = 2 \\ k_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; arriviamo quindi alla proiettività

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

che possiamo scrivere così (moltiplicando per 2):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$