Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione*

$$\frac{2\,z}{1+i} = -1\ .$$

Soluzione. Moltiplichiamo entrambi i membri per $\dfrac{1+i}{2}$:

$$\frac{2\,z}{1+i} \cdot \frac{1+i}{2} = -1 \cdot \frac{1+i}{2} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1+i}{2}\ ;$$

in definitiva la soluzione è

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\ .$$

Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 2. *Risolvere l'equazione*

$$z^3 = 1\ .$$

Soluzione. L'equazione può essere scritta nella forma

$$z^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

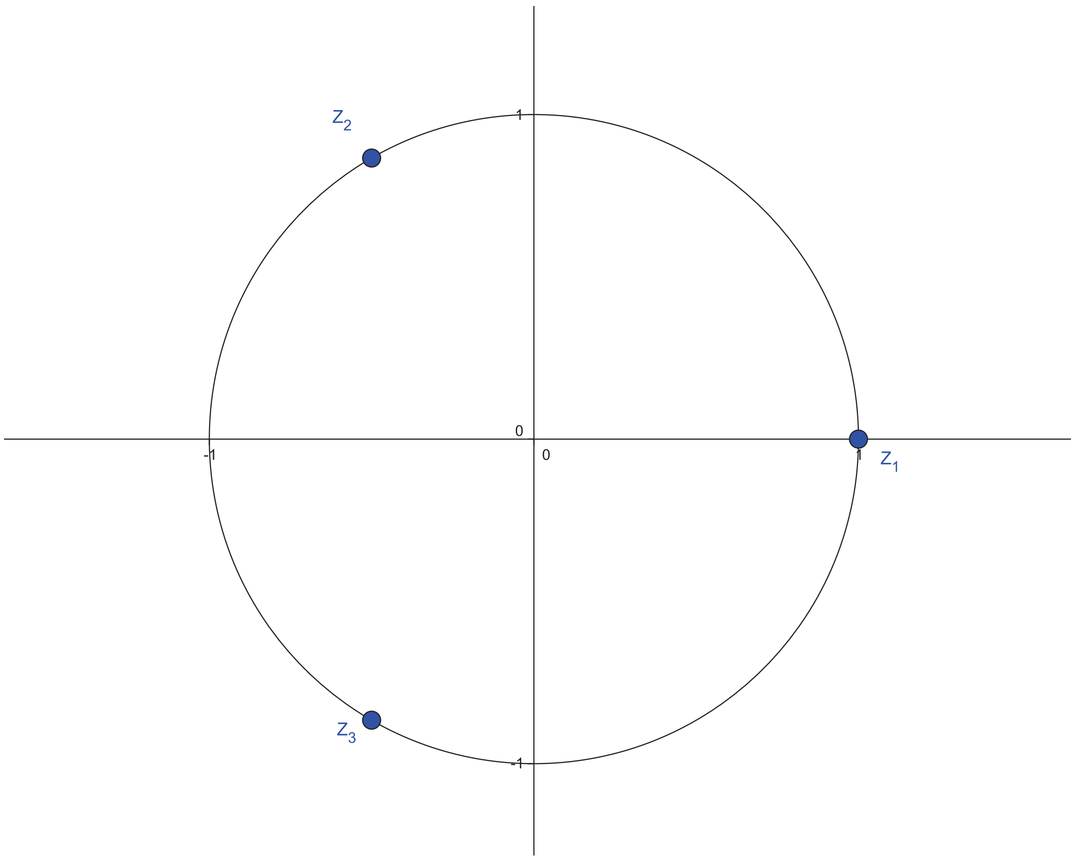
una soluzione è $z_1 = 1$, mentre le altre si ricavano dall'equazione $z^2 + z + 1 = 0$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$z_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2 \cdot 1} \begin{array}{l} \nearrow \quad z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i \\ \searrow \quad z_3 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i \end{array} .$$

In definitiva le soluzioni sono:

$$z_1 = 1 \ ; \ \ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \ ; \ \ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \ .$$



Esercizi svolti sui numeri complessi

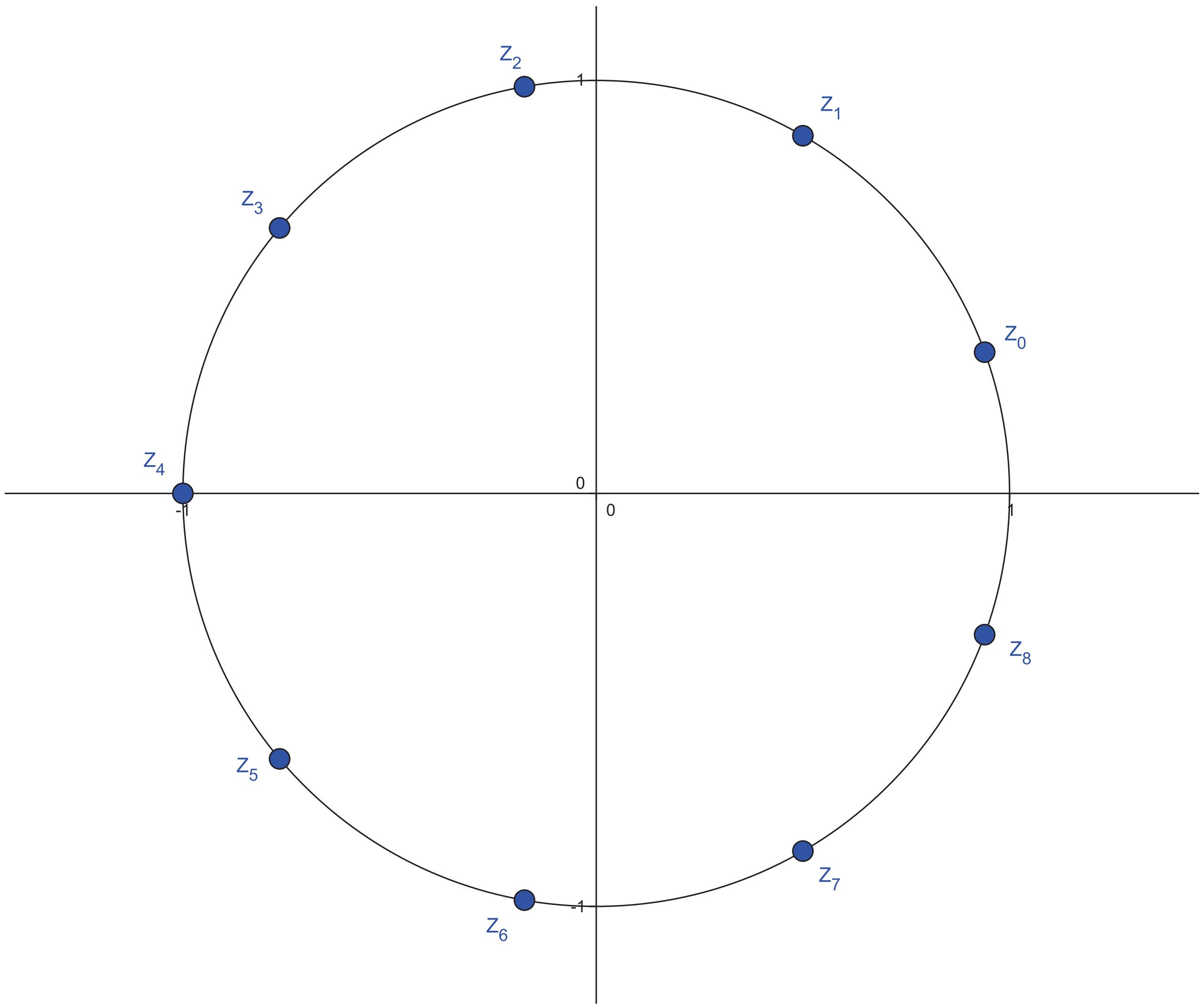
Esercizio 3. *Risolvere l'equazione*

$$z^9 = -1 \ .$$

Soluzione. Si tratta di determinare le radici none di -1; abbiamo

$$z_k = \sqrt[9]{|-1|}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\,k\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\,k\pi}{9}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi + 2\,k\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\,k\pi}{9}\right) \ ,$$

con $k = 0, ..., 8$.



Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 4. *Risolvere l'equazione*

$$z^3 = \overline{z^2}\,.$$

Soluzione. Consideriamo il modulo di entrambi i membri:

$$|z^3| = |\overline{z^2}|\;;$$

dal momento che $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$, abbiamo:

$$|z^3| = |(\overline{z})^2| \quad\Rightarrow\quad |z|^3 = |\overline{z}|^2 \quad\Rightarrow\quad |z|^3 = |z|^2$$

otteniamo quindi $|z| = 0$ e $|z| = 1$. La prima ci dice che $z = 0$ (ma questa soluzione poteva essere vista subito), mentre la seconda ci permette di scrivere:

$$z^3 = \overline{z^2} \quad\Rightarrow\quad z^3 = (\overline{z})^2 \quad\Rightarrow\quad z^3 \cdot z^2 = (\overline{z})^2 \cdot z^2$$

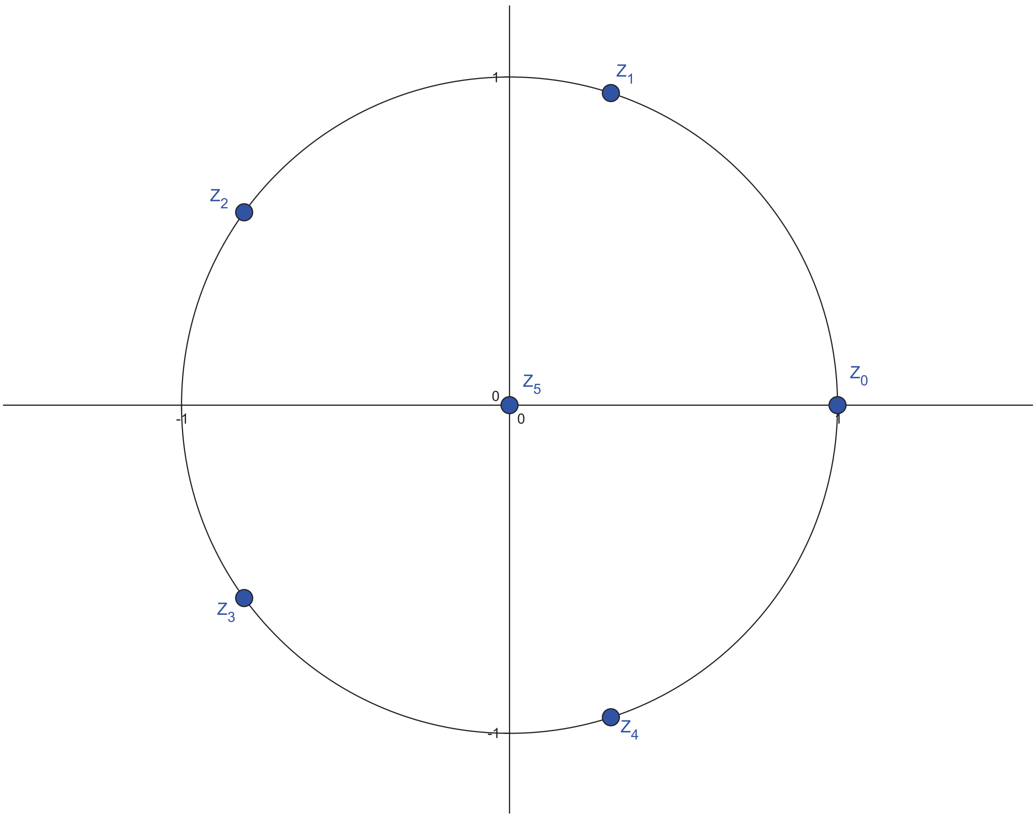
dal momento che $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, possiamo scrivere

$$z^3 \cdot z^2 = (\overline{z})^2 \cdot z^2 \quad\Rightarrow\quad z^5 = (z \cdot \overline{z})^2 \quad\Rightarrow\quad z^5 = \left(|z|^2\right)^2 \quad\Rightarrow\quad z^5 = |z|^4 \quad\Rightarrow\quad z^5 = 1\,.$$

Le soluzioni dell'equazione iniziale sono, perciò, oltre a 0, le radici quinte dell'unità:

$$z_k = \sqrt[5]{|1|}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\,k\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{0 + 2\,k\pi}{5}\right)\right] = \cos\left(\frac{2\,k\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\,k\pi}{5}\right)\ ,$$

con $k = 0, ..., 4$.



Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 5. *Risolvere l'equazione*

$$z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \, .$$

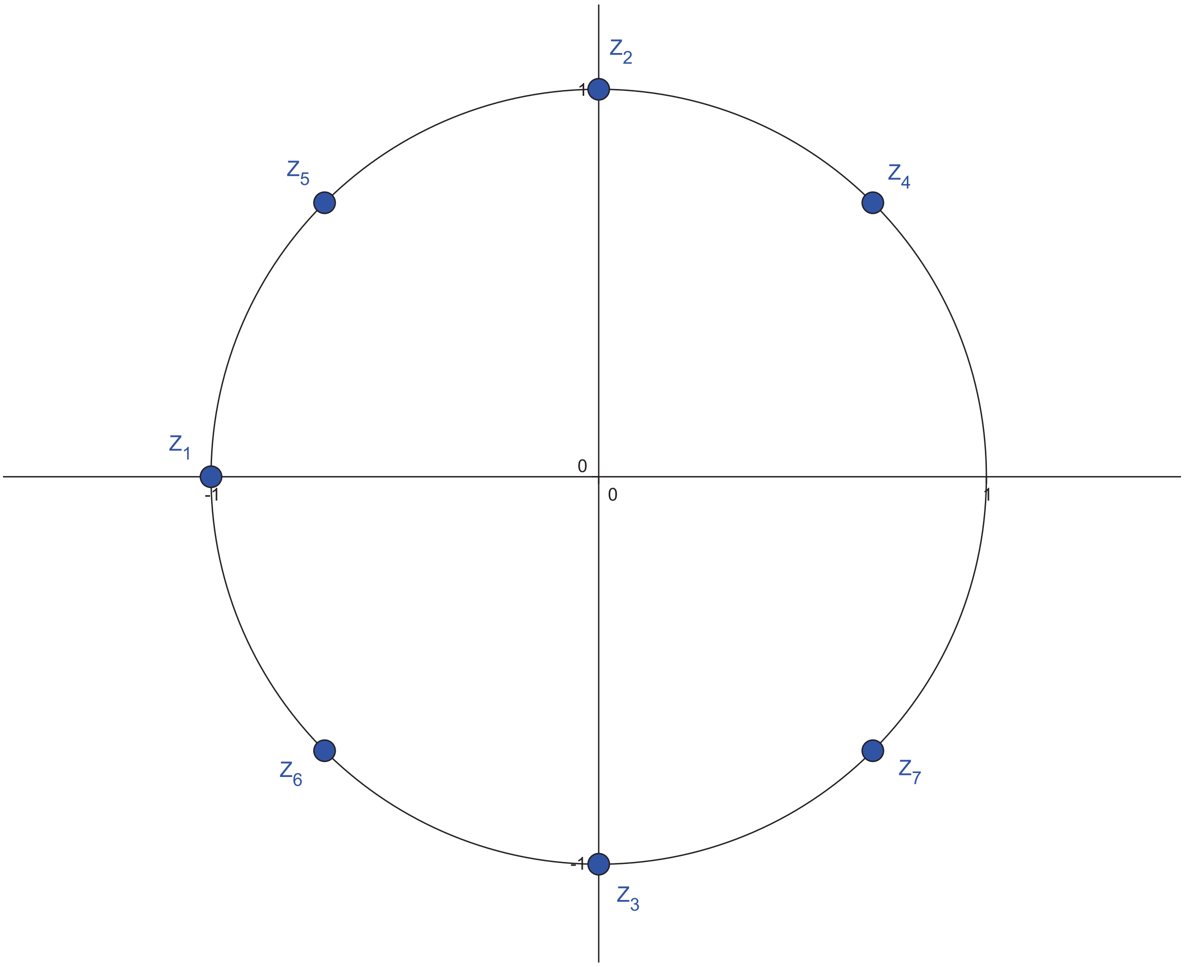
Soluzione. Possiamo riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$(z+1)(z^2+1)(z^4+1) = 0$$

le soluzioni sono:

$$z_1 = -1 \;\; ; \;\; z_2 = i \;\; ; \;\; z_3 = -i \;\; ;$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ; \;\; z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ; \;\; z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ; \;\; z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; .$$



Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 6. *Risolvere l'equazione*
$$z^6 + i\overline{z^3} = 0 \,.$$

Soluzione. Scritta l'equazione nella forma $z^6 = -i\,\overline{z^3}$, consideriamo il modulo di entrambi i membri:

$$|z^6| = |-i\,\overline{z^3}| \quad \Rightarrow \quad |z^6| = |-i| \cdot |(\overline{z})^3| \quad \Rightarrow \quad |z^6| = 1 \cdot |\overline{z}|^3 \quad \Rightarrow \quad |z^6| = |z^3|$$

quindi $|z| = 0$ oppure $|z| = 1$. Nel primo caso abbiamo la soluzione $z = 0$, mentre nel secondo caso l'equazione iniziale può essere riscritta nel modo seguente:

$$z^6 = -i\,\overline{z^3} \quad \Rightarrow \quad z^6 = -i\,(\overline{z})^3 \quad \Rightarrow \quad z^6 \cdot z^3 = -i\,(\overline{z})^3 \cdot z^3 \quad \Rightarrow$$

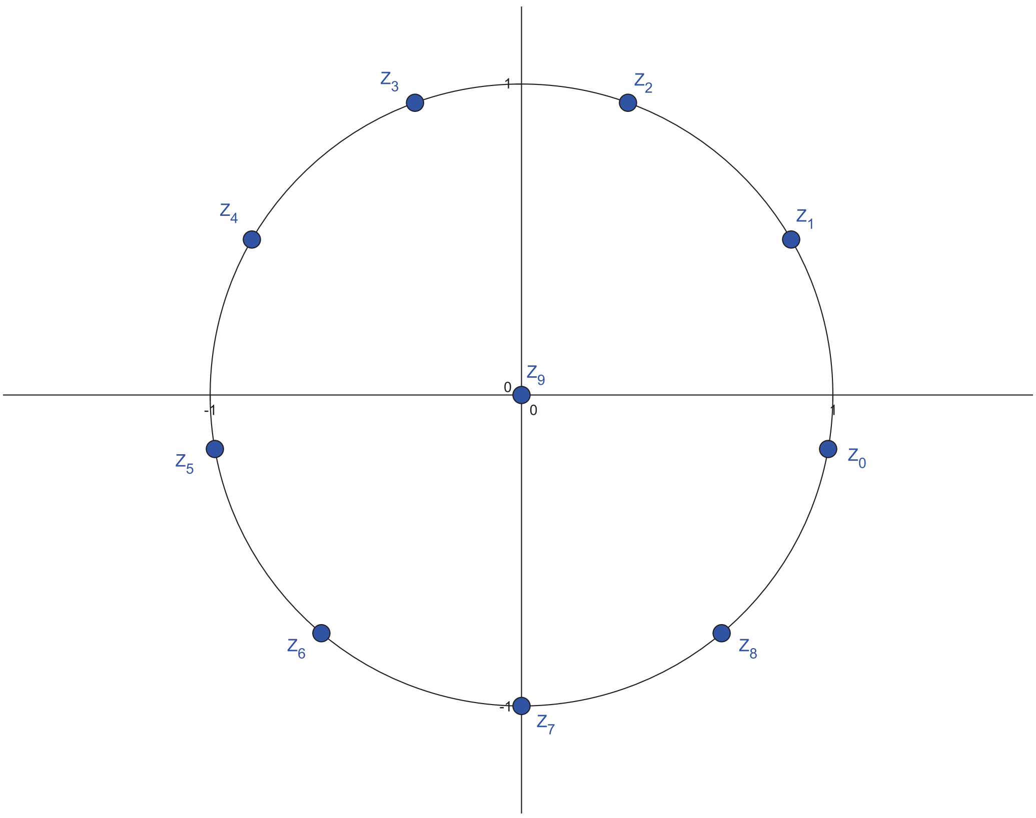
ricordando che $|z| = 1$ abbiamo:

$$\Rightarrow \quad z^9 = -i\,(z \cdot \overline{z})^3 \quad \Rightarrow \quad z^9 = -i\left(|z|^2\right)^3 \quad \Rightarrow \quad z^9 = -i \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad z^9 = -i$$

si tratta allora di calcolare le radici none di $-i$:

$$z_k = \sqrt[9]{|-i|}\left[\cos\left(\frac{-\pi/2 + 2\,k\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi/2 + 2\,k\pi}{9}\right)\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{-\pi/2 + 2\,k\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi/2 + 2\,k\pi}{9}\right) \qquad \text{con } k = 0, ..., 8 \,.$$



Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 7. *Risolvere l'equazione*

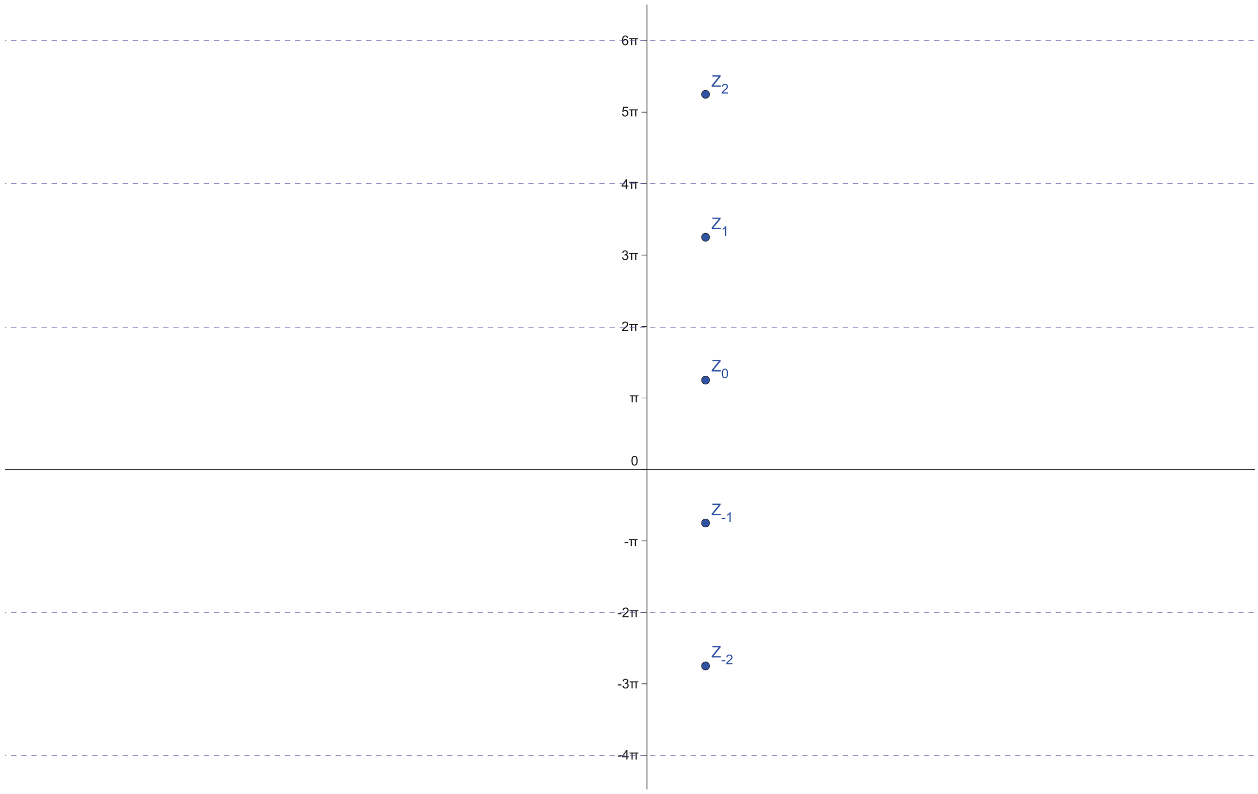
$$\exp(z) = -1 - i \; .$$

Soluzione. Il numero complesso $-1-i$ può essere scritto nella forma:

$$\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \; ;$$

il modulo è $\rho = \sqrt{2}$ e l'argomento è $\theta = \dfrac{5}{4}\,\pi$; le soluzioni sono perciò le seguenti:

$$z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{5}{4}\,\pi + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \; .$$



Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 8. *Risolvere la disequazione*

$$|z+i| > |z-i| \ .$$

Soluzione. Riscriviamo la disequazione nel modo seguente:

$$|z-(-i)| > |z-i| \ ;$$

le soluzioni della disequazione sono i numeri complessi che hanno distanza da $-i$ maggiore della distanza da i: si tratta dei numeri z che, quindi, appartengono al semipiano superiore, ovvero quelli tali che

$$\mathrm{Im}(z) > 0 \ .$$

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 9. *Risolvere l'equazione*

$$(\exp(z))^3 + (2+\sqrt{3}\,i)(\exp(z))^2 + (3\sqrt{3}\,i - 3)\exp(z) = 0\,.$$

Soluzione. Ponendo $w = \exp$ (z), abbiamo:

$$w^3 + (2+\sqrt{3}\,i)w^2 + (3\sqrt{3}\,i - 3)w = 0$$

si hanno le seguenti soluzioni:

$$w_1 = 0 \;\;;\;\; w_2 = -3 \;\;;\;\; w_3 = 1 - \sqrt{3}\,i\,.$$

La prima ($w = 0$) porta a

$$\exp(z) = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{impossibile}\;;$$

la seconda ($w = -3$) porta a

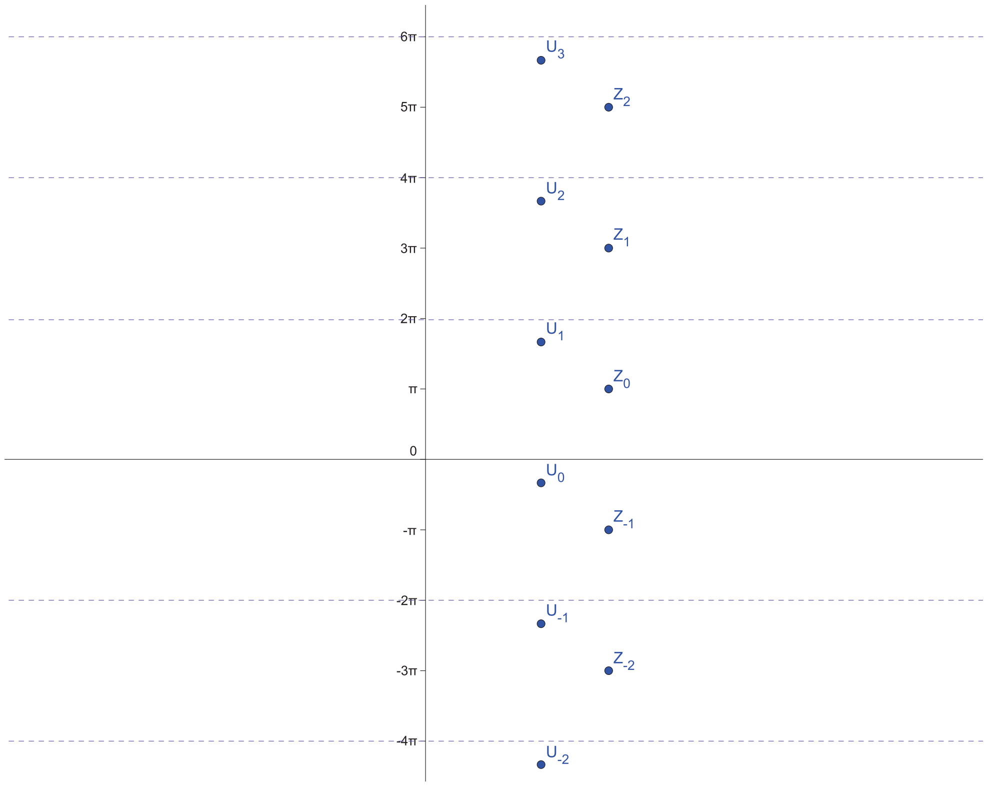
$$\exp(z) = -3 \quad\Rightarrow\quad z = \ln(|-3|) + i\,(\pi + 2\,k\pi)$$

$$\Rightarrow\quad z_k = \ln 3 + i\,(2\,k+1)\pi \;\;\text{con } k \in \mathbb{Z}\;;$$

la terza ($w = 1 - \sqrt{3}\,i$) porta invece a

$$\exp(z) = 1 - \sqrt{3}\,i \quad\Rightarrow\quad z = \ln|1 - \sqrt{3}\,i| + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\,k'\pi\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad u_k = \ln 2 + i\left(2\,k' - \frac{1}{3}\right)\pi \;\;\text{con } k' \in \mathbb{Z}\;;$$



Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 10. *Risolvere l'equazione*

$$z^2 = \overline{z^2}\ .$$

Soluzione. (Primo metodo) Poniamo $z = x + iy$ e riscriviamo l'equazione iniziale:

$$(x+iy)^2 = \overline{(x+iy)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2\,ixy = \overline{x^2 - y^2 + 2\,ixy} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2\,ixy = x^2 - y^2 - 2\,ixy \quad \Rightarrow \quad 2\,ixy = -2\,ixy \quad \Rightarrow \quad 4\,ixy = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = 0$$

l'ultima equazione ci dice che $x = 0$ oppure $y = 0$: le soluzioni dell'equazione iniziale sono, perciò, i numeri reali e i numeri immaginari puri.

(Secondo metodo) Possiamo scrivere l'equazione iniziale nel modo seguente:

$$z^2 - \overline{z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - (\overline{z})^2$$

riconoscendo ora la differenza di due quadrati possiamo scrivere

$$(z - \overline{z}) \cdot (z + \overline{z}) = 0$$

quindi abbiamo $z = \overline{z}$ oppure $z = -\overline{z}$. Nel primo caso si ottengono i numeri reali, nel secondo caso tutti i numeri immaginari puri.

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 11. *Risolvere l'equazione*

$$z^4 + iz^3 + z^2 + iz = 0\ .$$

Soluzione. Raccogliamo z :

$$z(z^3 + iz^2 + z + i) = 0$$

a questo punto raccogliamo $(z + i)$, ottenendo così

$$z(z + i)(z^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z(z - i)(z + i)^2 = 0$$

le soluzioni, pertanto, sono le seguenti:

$$z_1 = 0\ \ ;\ \ z_2 = i\ \ ;\ \ z_3 = -i\ .$$

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 12. *Risolvere l'equazione*

$$\left(z^2 - 2\,i\right)^2 = \left(z^2 + 4\,z\right)^2 \, .$$

Soluzione. Portando tutto a sinistra abbiamo

$$(z^2 - 2\,i)^2 - (z^2 + 4\,z)^2 = 0$$

quindi, sfruttando la formula per la differenza di due quadrati, ricaviamo

$$\left(z^2 - 2\,i + z^2 + 4\,z\right)\left(z^2 - 2\,i - z^2 - 4\,z\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\,(2\,z + i)(z^2 + 2\,z - i) = 0$$

la soluzione $z = -\dfrac{i}{2}$ proviene da $2\,z + i = 0$, mentre le soluzioni z_k che provengono dall'equazione di secondo grado $z^2 + 2\,z - i = 0$ sono

$$z_k = -1 \pm \sqrt{1+i} \; .$$

Calcoliamo ora le radici quadrate w_k del numero complesso $(1+i)$:

$$w_k = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2\,k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/4 + 2\,k\pi}{2}\right)\right] \quad \text{con } k = 0, 1$$

semplificando

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\,\pi\right)\right] \quad \text{con } k = 0, 1\,;$$

poiché risulta

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

le soluzioni z_k si ottengono a partire da w_k sommando -1:

$$z_0 = -1 + \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \quad ; \quad z_1 = -1 + \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \, .$$

In definitiva, le soluzioni dell'equazione di partenza sono le seguenti:

$$z_0 \;\; ; \;\; z_1 \;\; ; \;\; z_2 = -\frac{i}{2} \, .$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 13. *Risolvere l'equazione*

$$\big((\exp(z))^3 - 5\,i\,\exp(z)\big)\,(z^3 - 8\,i) = 0\,.$$

Soluzione. Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo due equazioni:

$$(\exp(z))^3 - 5\,i\,\exp(z) = 0 \quad ; \quad z^3 - 8\,i = 0\,;$$

l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza si ottiene unendo le soluzioni delle singole equazioni.

Per la prima equazione, ponendo $w = \exp(z)$, abbiamo

$$w^3 - 5\,i\,w = 0 \;\Rightarrow\; w(w^2 - 5\,i) = 0$$

una soluzione è $w_0 = 0$ mentre le altre due soluzioni w_1, w_2 sono le radici quadrate del numero complesso $5\,i$; esse si ottengono osservando che

$$5\,i = 5\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

da cui ricaviamo

$$w_{1;2} = \pm\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

poiché $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, si ricava:

$$w_{1;2} = \pm\sqrt{5}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \pm\left[\frac{\sqrt{10}}{2} + i\,\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$$

e quindi

$$w_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2} \quad ; \quad w_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}\,;$$

per la prima soluzione $w_0 = 0$ si ha

$$w_0 = 0 \;\Rightarrow\; \exp(z) = 0 \;\Rightarrow\; \text{impossibile}\,;$$

per le altre due (cioè w_1 e w_2), invece, abbiamo:

$$w_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2} \;\Rightarrow\; \exp(z) = \frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2} \;\Rightarrow\; z = \ln\sqrt{5} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\,k\pi\right) \;\text{ con } k\in\mathbb{Z}\,,$$

$$w_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2} \;\Rightarrow\; \exp(z) = -\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2} \;\Rightarrow\; z = \ln\sqrt{5} + i\left(\frac{5\,\pi}{4} + 2\,k'\pi\right) \;\text{ con } k'\in\mathbb{Z}\,.$$

Per quanto riguarda l'equazione $z^3 - 8\,i = 0$, si tratta di calcolare le radici terze di $8\,i$ (infatti l'equazione può essere scritta così: $z^3 = 8\,i$):

$$z = -2\,i \;\;;\;\; z = \sqrt{3} + i \;\;;\;\; z = -\sqrt{3} + i\;\;.$$

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 14. *Risolvere l'equazione*

$$(2\,z+3)^3 = -27\,i\ .$$

Soluzione. Ponendo $w = 2\,z+3$, l'equazione può essere riscritta così:

$$w^3 = -27\,i\ ;$$

le soluzioni sono

$$w_1 = 3\,i\ \ ;\ \ w_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i\ \ ;\ \ w_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i\ \ .$$

Poiché

$$z = \frac{1}{2}\cdot(w-3) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,w\ ,$$

si hanno le seguenti soluzioni:

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,i\ \ ;\ \ z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\,i\ \ ;\ \ z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\,i\ \ .$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 15. *Risolvere l'equazione*

$$|\exp(z) + \sqrt{3}\, i| \cdot (\exp(z) + \sqrt{3}\, i) = 9\,.$$

Soluzione. Ponendo $w = \exp(z) + \sqrt{3}\, i$ abbiamo

$$|w| \cdot w = 9\,;$$

considerando il modulo di entrambi i membri si ha

$$||w| \cdot w| = |9| \quad \Rightarrow \quad |w|^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad |w| = 3\,.$$

Sostituendo $|w| = 3$ nell'equazione $|w| \cdot w = 9$, otteniamo

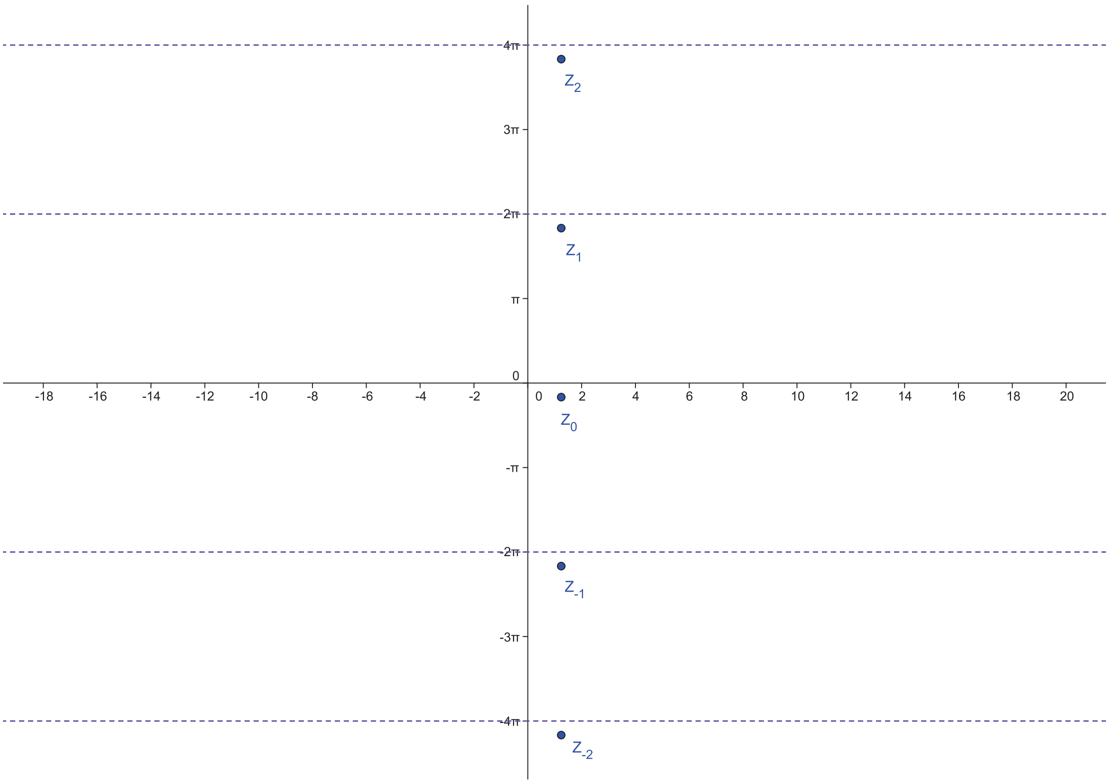
$$3 \cdot w = 9 \quad \Rightarrow \quad w = 3\,;$$

ricordando che $w = \exp(z) + \sqrt{3}\, i$, ricaviamo

$$\exp(z) + \sqrt{3}\, i = 3 \quad \Rightarrow \quad \exp(z) = 3 - \sqrt{3}\, i\,;$$

dal momento che risulta $|3 - \sqrt{3}\, i| = 2\sqrt{3}$, $\arg(3 - \sqrt{3}\, i) = -\dfrac{\pi}{6}$, otteniamo le soluzioni dell'equazione di partenza:

$$z_k = \ln(2\sqrt{3}) + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,.$$



Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 16. *Risolvere l'equazione*

$$z^2 + 2\,iz - 3 + 2\sqrt{3}\,i = 0\ .$$

Soluzione. Con la classica formula si trova

$$z_{1;2} = -i \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{3}\,i} \quad ;$$

risulta

$$2 - 2\,\sqrt{3}\,i = 4\left[\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\,\pi\right)\right]$$

a questo punto le due radici quadrate r_1 e r_2 di $(2 - 2\,\sqrt{3}\,i)$ sono

$$r_1 = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{5}{3}\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{3}\,\pi}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\,\pi\right)\right] = -\sqrt{3} + i$$

$$r_2 = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{5}{3}\,\pi + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{3}\,\pi + 2\pi}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{11}{6}\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\,\pi\right)\right] = \sqrt{3} - i$$

sostituendo questi valori nelle due equazioni $z_{1;2} = -i \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{3}\,i}$ si ricava:

$$z_1 = -i + r_1 = -i + (-\sqrt{3} + i) = -\sqrt{3}\ ;$$

$$z_2 = -i + r_2 = -i + (\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - 2i\ .$$

In definitiva le due soluzioni sono

$$z_1 = -\sqrt{3} \ \ ; \ \ z_2 = \sqrt{3} - 2i\ .$$

Francesco Daddi - 24 ottobre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 17. *Risolvere l'equazione*
$$z^3 = (i-2)^3 \ .$$

Soluzione. L'equazione assegnata può essere scritta nel modo seguente:
$$z^3 - (i-2)^3 = 0 \ ;$$
si tratta di una differenza di due cubi, per cui abbiamo
$$(z-(i-2)) \cdot (z^2 + (i-2)z + 3 - 4\,i) = 0 \ ;$$
dalla prima parentesi troviamo la prima (scontata) soluzione $z_0 = i-2$, mentre dalla seconda parentesi troviamo
$$z_{1;2} = \frac{2-i \pm \sqrt{-9+12\,i}}{2} \ ;$$
ora cerchiamo le radici quadrate di $(-9+12\,i)$ nella forma generica $a+ib$:
$$(a+ib)^2 = -9+12\,i \ \Rightarrow \ a^2-b^2+i(2\,ab) = -9+12\,i \ \Rightarrow \ \begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ 2\,ab=12 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ b=\dfrac{6}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-\left(\dfrac{6}{a}\right)^2=-9 \\ b=\dfrac{6}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-\left(\dfrac{6}{a}\right)^2=-9 \\ b=\dfrac{6}{a} \end{cases}$$
osservando che deve necessariamente essere $a \neq 0$ e ricordando che a e b sono reali, troviamo le due radici quadrate di $(-9+12\,i)$:
$$\begin{cases} a^4+9\,a^2-36=0 \\ b=\dfrac{6}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \end{cases} \cup \begin{cases} a=-\sqrt{3} \\ b=\dfrac{6}{-\sqrt{3}}=-2\sqrt{3} \end{cases} \ ;$$
in definitiva, le radici quadrate del numero $(-9+12\,i)$ sono le seguenti:
$$r_1 = \sqrt{3}+2\sqrt{3}\,i \quad ; \quad r_2(=-r_1) = -\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,i \ .$$

Le altre due soluzioni z_1 e z_2 dell'equazione iniziale, perciò, risultano essere:
$$z_1 = \frac{2-i+(\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,i)}{2} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i \ ;$$
$$z_2 = \frac{2-i-(\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,i)}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i \ .$$

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 18. *Fattorizzare su* $\mathbb{R}$ *il polinomio*

$$p(x) = x^4 - x^2 + 1\ .$$

Soluzione. Passando dai complessi possiamo scrivere:

$$p(x) = x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^2$$

da cui

$$p(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \left(x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\right) \cdot \left(x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

quindi, tenendo conto del fatto che le radici quadrate dei numeri complessi $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$ e $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$ sono rispettivamente $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$ e $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$, possiamo scrivere

$$p(x) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

raggruppando i binomi che coinvolgono le radici complesse coniugate abbiamo

$$p(x) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

moltiplicando a coppie arriviamo finalmente alla fattorizzazione su $\mathbb{R}$:

$$p(x) = x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 - \sqrt{3}\,x + 1\right) \cdot \left(x^2 + \sqrt{3}\,x + 1\right)\ .$$

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 19. *Risolvere il seguente sistema* $(dove\ x, y \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4\,x + 5 = 0 \\ 2\,xy + 4\,y = 0 \end{cases} .$$

Soluzione. I primi due termini della prima equazione (ovvero $x^2 - y^2$) e il primo termine della seconda equazione (cioè $2\,xy$) costituiscono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria di $(x + iy)^2$; dal momento che i termini di primo grado hanno lo stesso coefficiente, possiamo concludere che il sistema assegnato "proviene" dall'equazione complessa

$$z^2 + 4\,z + 5 = 0\ .$$

Possiamo ora risolvere l'equazione scritta con la nota formula:

$$z_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i\ ;$$

le soluzioni dell'equazione complessa sono, pertanto $z_1 = -2 + i$ e $z_2 = -2 - i$.

Tornando al sistema di partenza, possiamo affermare che le soluzioni x e y si ottengono considerando, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria delle soluzioni complesse z_1, z_2 che abbiamo appena ricavato. In definitiva abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases} .$$

Osservazione. E' possibile rappresentare nel piano cartesiano le due equazioni che costituiscono il sistema di partenza: si tratta, rispettivamente, di un'iperbole equilatera e di una coppia di rette ortogonali. Le due curve si intersecano nei punti $A(-2\,;\,1)$ e $B(-2\,;\,-1)$.

Francesco Daddi - 15 novembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 20. *Risolvere la seguente equazione:*

$$|z| = i - 4\,z\,.$$

Soluzione. Posto $z = a + ib$ possiamo riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = i - 4(a + ib)\ ,$$

da cui, portando tutto a sinistra, abbiamo

$$\sqrt{a^2 + b^2} + 4\,a + i(4\,b - 1) = 0$$

uguagliando a zero la parte reale e la parte immaginaria ci troviamo a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + 4\,a = 0 \\ 4\,b - 1 = 0 \end{cases}$$

osserviamo che, dalla prima equazione, risulta chiaramente $a \leq 0$; dalla seconda equazione ricaviamo invece $b = \dfrac{1}{4}$, per cui

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = -4\,a \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{16}} = -4\,a \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

elevando al quadrato la prima equazione abbiamo

$$\begin{cases} a^2 + \dfrac{1}{16} = 16\,a^2 \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 15\,a^2 = \dfrac{1}{16} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{240} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

ricordando che $a \leq 0$, si trova la soluzione

$$\begin{cases} a = -\sqrt{\dfrac{1}{240}} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

razionalizzando a, l'equazione iniziale ammette come unica soluzione il numero complesso

$$z = -\frac{\sqrt{15}}{60} + \frac{1}{4}\,i\ .$$

Francesco Daddi - 21 novembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 21. *Risolvere la seguente equazione:*

$$(2\,z-1)^2(2\,\overline{z}+1)=4\,z\,(2\,z-1)\,.$$

Soluzione. Ponendo $2\,z-1=w$ abbiamo:

$$w^2(\overline{w}+2)=4\,\frac{w+1}{2}\,w\quad\Rightarrow\quad w^2(\overline{w}+2)=2\,w(w+1)$$

svolgendo otteniamo

$$w^2\cdot\overline{w}+2\,w^2=2\,w^2+2\,w\quad\Rightarrow\quad w\cdot w\cdot\overline{w}=2\,w\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad w\cdot|w|^2=2\,w\quad\Rightarrow\quad w\left(|w|^2-2\right)=0$$

le soluzioni sono

$$w=0\quad;\quad|w|=\sqrt{2}$$

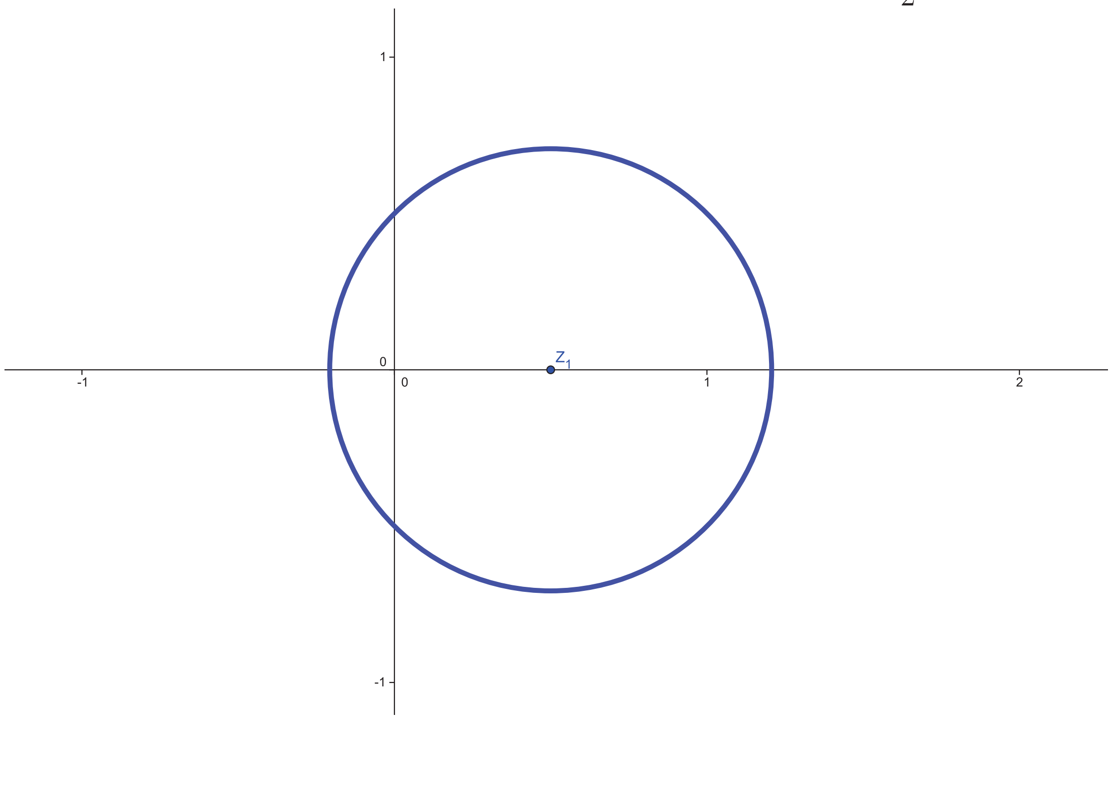
ricordando che $2\,z-1=w$ abbiamo le seguenti soluzioni:

$$z_1=\frac{1}{2}\quad;\quad|2\,z-1|=\sqrt{2}$$

per quanto riguarda le soluzioni tali che $|2\,z-1|=\sqrt{2}$ possiamo dividere tutto per 2, ricavando così

$$\frac{1}{2}\cdot|2\,z-1|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

si tratta quindi dei numeri complessi che stanno sulla circonferenza di centro $\frac{1}{2}+0\,i$ e raggio $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Francesco Daddi - 3 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 22. *Determinare i numeri complessi z tali che*

$$\frac{|z+1|}{|z-i|} = 2\,. \qquad (1)$$

Soluzione. Moltiplichiamo tutto per $|z-i|$, ottenendo così

$$|z+1| = 2|z-i|$$

ponendo ora $z = x+iy$ abbiamo

$$|x+1+iy| = 2|x+iy-i| \quad \Rightarrow \quad |(x+1)+iy| = 2|x+i(y-1)|\,;$$

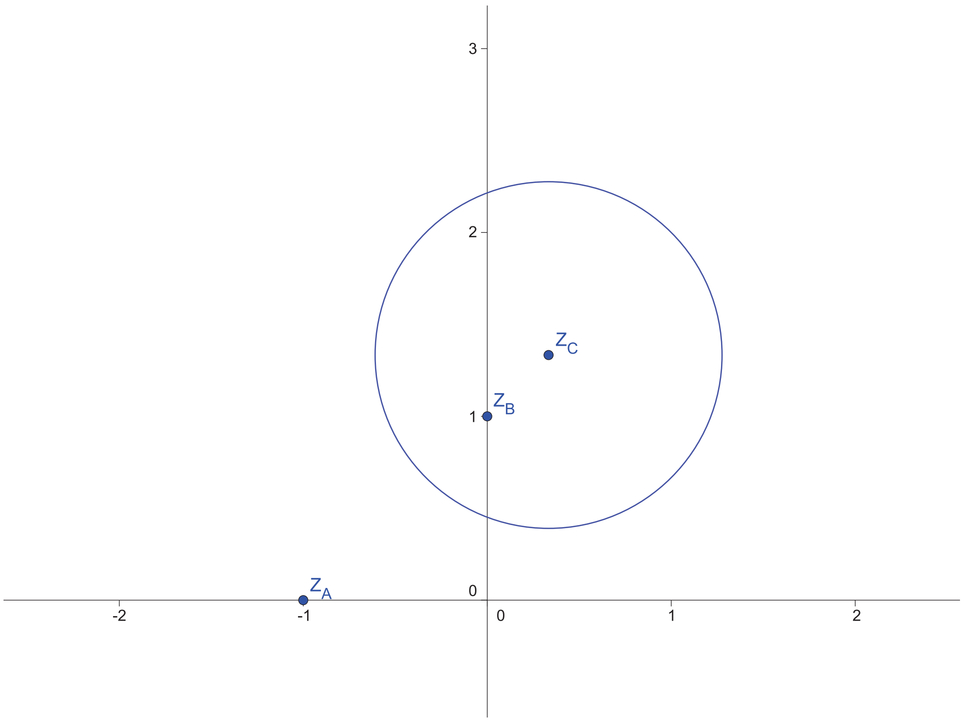
calcolando i moduli ed elevando tutto al quadrato si ha

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 2\,\sqrt{x^2+(y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2+y^2 = 4\,\left[x^2+(y-1)^2\right]$$

svolgendo i calcoli e semplificando otteniamo

$$-3\,x^2+2\,x-3-3\,y^2+8\,y=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-\frac{2}{3}\,x-\frac{8}{3}\,y+1=0$$

i numeri complessi che risolvono l'equazione (1) appartengono alla circonferenza di centro $z_C = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}\,i$ e raggio $R = \frac{2\,\sqrt{2}}{3}$. Da un punto di vista geometrico si tratta del luogo dei punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati (in questo caso i punti sono $z_A = -1+0\,i$ e $z_B = 0+i$) è costante (in questo caso la costante è 2), noto come **cerchio di Apollonio.** Si osservi che z_C appartiene alla retta passante per z_A e z_B.



Francesco Daddi - 3 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 23. *Determinare i numeri complessi z tali che*

$$z^8 + |z|^8 = 0 \,. \tag{1}$$

Soluzione. *Primo metodo.* $z^8 + (|z|^2)^4 = 0 \;\Rightarrow\; z^4 \cdot z^4 + (z \cdot \overline{z})^4 = 0 \;\Rightarrow\; z^4 \cdot (z^4 + \overline{z}^4) = 0 \;\Rightarrow$ una soluzione quindi è $z = 0$, mentre le altre soluzioni vanno cercate in $z^4 + \overline{z}^4 = 0$. Ponendo $z = a + ib$ abbiamo $z^4 + \overline{z}^4 = 0 \;\Rightarrow\; a^4 + 4\,ia^3b - 6\,a^2b^2 - 4\,i\,ab^3 + b^4 + a^4 - 4\,ia^3b - 6\,a^2b^2 + 4\,ib^3a + b^4 = 0 \;\Rightarrow$

$$2\,a^4 - 12\,a^2b^2 + 2\,b^4 = 0 \;\Rightarrow\; a^4 - 6\,a^2b^2 + b^4 = 0$$

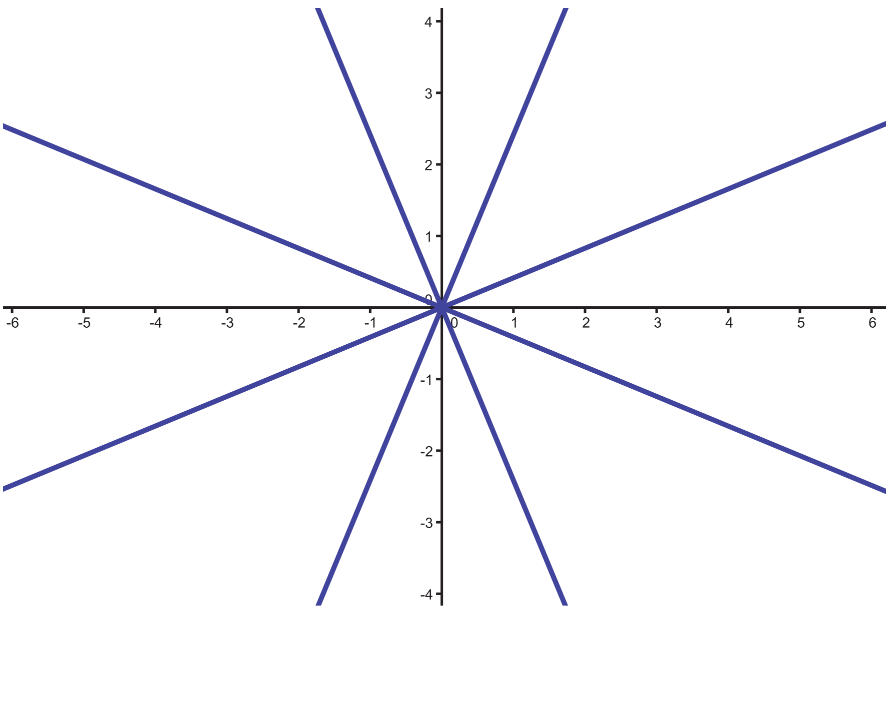
dividendo l'ultima equazione per $a^4 \neq 0$ otteniamo $\dfrac{a^4 - 6\,a^2b^2 + b^4}{a^4} = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 6\,\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{b^4}{a^4} = 0$; ponendo ora $t = \dfrac{b^2}{a^2} \geq 0$ ricaviamo $1 - 6\,t + t^2 = 0$; risolvendo l'equazione si ha $t_{1;2} = 3 \pm \sqrt{8}$; con le formule dei radicali doppi otteniamo queste soluzioni:

$$\frac{b}{a} = \pm\sqrt{3+\sqrt{8}} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-8}}{2}}\right) = \pm(\sqrt{2}+1) \,;$$

$$\frac{b}{a} = \pm\sqrt{3-\sqrt{8}} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-8}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-8}}{2}}\right) = \pm(\sqrt{2}-1) \,;$$

le soluzioni dell'equazione sono dunque i numeri complessi che appartengono alle quattro rette seguenti:

$$b = (\sqrt{2}+1)\,a \;\;;\;\; b = -(\sqrt{2}+1)\,a \;\;;\;\; b = (\sqrt{2}-1)\,a \;\;;\;\; b = -(\sqrt{2}-1)\,a \,.$$



Secondo metodo. Osserviamo che, se w è soluzione dell'equazione, allora lo è anche $z = kw$ con $k \in \mathbb{R}$; infatti abbiamo:

$$z^8 + |z|^8 = (kw)^8 + |kw|^8 = k^8 \cdot w^8 + |k|^8 \cdot |w|^8 = k^8 \cdot w^8 + k^8 \cdot |w|^8 = k^8 \cdot \left(w^8 + |w|^8\right) = k^8 \cdot 0 = 0$$

quindi possiamo porre $|z| = 1$ e cercare le soluzioni sul cerchio unitario:

$$z^8 + |z|^8 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^8 + 1^8 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^8 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^8 = -1$$

si tratta quindi di determinare le radici ottave di -1 e considerare poi tutti i multipli reali delle soluzioni ottenute. Si ritrovano così le quattro rette che abbiamo ottenuto con il primo metodo.

Riportiamo qui di seguito, per completezza, le radici ottave di -1 $(= -1 + 0\,i = \cos\pi + i\sin\pi)$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) && = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
z_1 &= \cos\left(\frac{3\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\,\pi}{8}\right) && = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
z_2 &= \cos\left(\frac{5\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\,\pi}{8}\right) && = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
z_3 &= \cos\left(\frac{7\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\,\pi}{8}\right) && = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
z_4 &= \cos\left(\frac{9\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\,\pi}{8}\right) && = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
z_5 &= \cos\left(\frac{11\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{11\,\pi}{8}\right) && = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
z_6 &= \cos\left(\frac{13\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\,\pi}{8}\right) && = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
z_7 &= \cos\left(\frac{15\,\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{15\,\pi}{8}\right) && = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

si osservi che:

z_0 e z_4 appartengono alla retta $b = (\sqrt{2} - 1)\,a\,$;

z_1 e z_5 appartengono alla retta $b = (\sqrt{2} + 1)\,a\,$;

z_2 e z_6 appartengono alla retta $b = -(\sqrt{2} + 1)\,a\,$;

z_3 e z_7 appartengono alla retta $b = -(\sqrt{2} - 1)\,a\,.$

Francesco Daddi - 7 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 24. *Determinare i numeri complessi z tali che*

$$|z - 3 - 2\,i| = |\mathrm{Im}(z - i)|\ .$$

Soluzione. Ponendo $z = a + ib$ abbiamo

$$|a + ib - 3 - 2\,i| = |\mathrm{Im}(a + ib - i)| \quad \Rightarrow \quad |(a - 3) + i(b - 2)| = \big|\mathrm{Im}\big(a + i(b - 1)\big)\big|$$

quindi $\sqrt{(a-3)^2 + (b-2)^2} = |b - 1|$ da cui, elevando al quadrato, otteniamo: $(a-3)^2 + (b-2)^2 = (b-1)^2$; svolgendo i calcoli troviamo

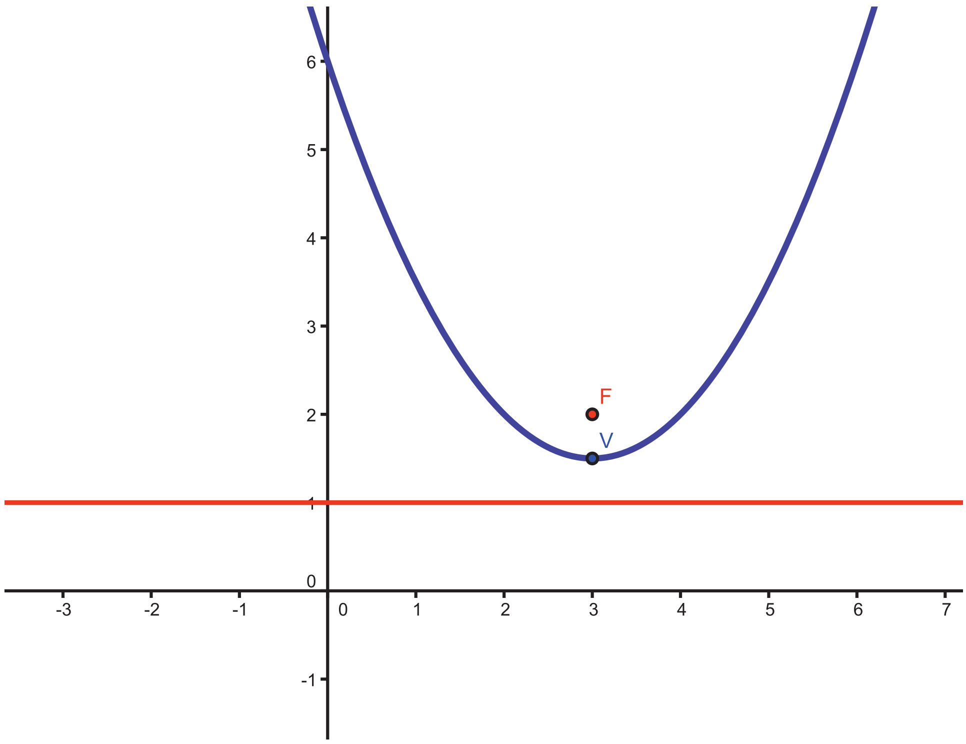
$$a^2 - 6\,a + 12 - 2\,b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}\,a^2 - 3\,a + 6$$

*l'insieme dei numeri complessi che risolvono l'equazione iniziale è una **parabola** nel piano complesso.*

Analizziamo l'equazione di partenza riscrivendola in questo modo:

$$|z - 3 - 2\,i| = |\mathrm{Im}(z - i)| \quad \Rightarrow \quad |z - (3 + 2\,i)| = |\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(i)| \quad \Rightarrow \quad |z - (3 + 2\,i)| = |\mathrm{Im}(z) - 1|$$

i numeri z che risolvono l'equazione sono tali che la loro distanza da $(3 + 2\,i)$ è uguale alla distanza dalla retta $\mathrm{Im}(z) = 1$ (questa retta passa da $0 + i$ ed è parallela all'asse reale); il vertice della parabola è $V = 3 + \frac{3}{2}\,i$, il fuoco è $F = 3 + 2\,i$ e la direttrice è la retta $\mathrm{Im}(z) = 1$.



Francesco Daddi - 7 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 25. *Determinare i numeri complessi z tali che*

$$|z|^4 - 19\,|z|^3 + 97\,|z|^2 - 45\,|z| - 162 = 0\ .$$

Soluzione. Ponendo $|z| = k\,(\geq 0)$ l'equazione diventa

$$k^4 - 19\,k^3 + 97\,k^2 - 45\,k - 162 = 0$$

si trova che $k = -1$ è una radice del polinomio; dividendo il polinomio per $(k+1)$ otteniamo:

$$k^4 - 19\,k^3 + 97\,k^2 - 45\,k - 162 = (k+1)(k^3 - 20\,k^2 + 117\,k - 162)\ ;$$

poiché $k = 2$ è una radice del polinomio di terzo grado, abbiamo:

$$k^4 - 19\,k^3 + 97\,k^2 - 45\,k - 162 = (k+1)(k-2)(k^2 - 18\,k + 81)\ ;$$

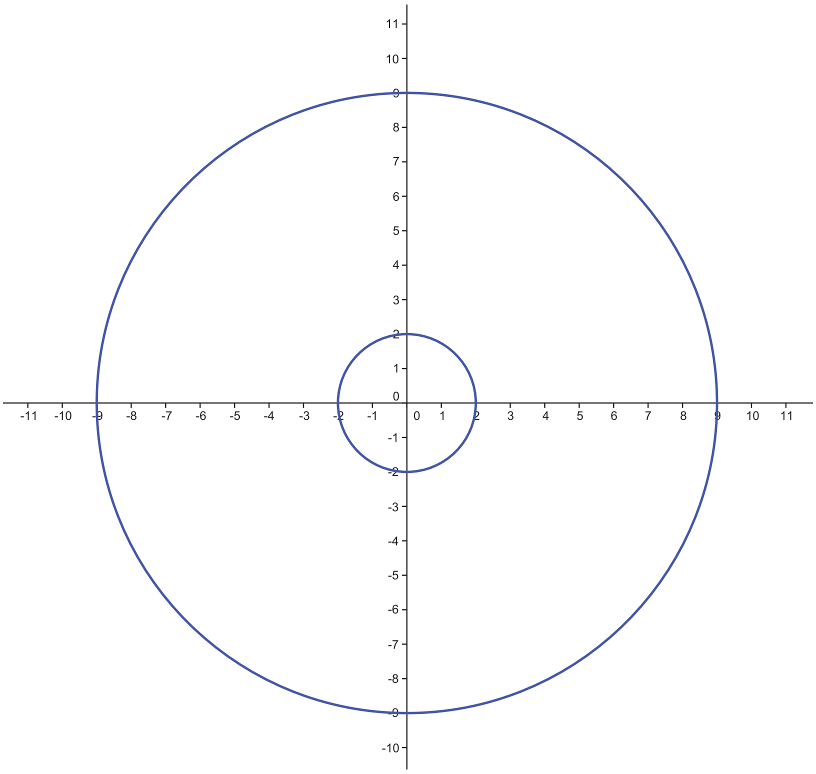
poiché risulta $k^2 - 18\,k + 81 = (k-9)^2$, l'equazione di partenza può essere scritta in questo modo:

$$(|z| - 9)^2 \cdot (|z| + 1) \cdot (|z| - 2) = 0$$

le soluzioni sono, pertanto, i numeri complessi tali che:

$$|z| = 9 \quad \cup \quad |z| = 2$$

(si osservi che non esistono numeri complessi tali che $|z| + 1 = 0$**).**



Francesco Daddi - 9 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 26. *Determinare la condizione che deve essere rispettata dai due parametri reali k e h affinché l'equazione*

$$z^2 + k\,iz + h = 0\;. \tag{1}$$

abbia soluzioni con parte reale nulla.

Soluzione. Calcolando il discriminante dell'equazione di secondo grado abbiamo

$$\Delta = (k\,i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot h = -k^2 - 4\,h$$

poiché le soluzioni dell'equazione sono

$$z_{1;2} = \frac{-k\,i \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-k\,i \pm \sqrt{-k^2 - 4\,h}}{2}$$

per avere soluzioni con parte reale nulla è necessario che il numeratore abbia parte reale nulla (il denominatore, infatti, è reale):

$$\mathrm{Re}\left(-k\,i \pm \sqrt{-k^2 - 4\,h}\right) = 0$$

dal momento che $-k\,i$ ha parte reale nulla, ciò deve verificarsi anche per $\sqrt{-k^2 - 4\,h}$ e quindi **la condizione richiesta è la seguente:**

$$-k^2 - 4\,h \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 4\,h \geq 0\;.$$

Osservazione. Se risulta

$$-k^2 - 4\,h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 4\,h = 0$$

abbiamo due radici coincidenti $\left(\text{e sono entrambe uguali a } -\frac{k\,i}{2}\right)$.

• Analizziamo infine il caso

$$-k^2 - 4\,h > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 4\,h < 0\;;$$

sotto questa condizione le due soluzioni z_1, z_2 dell'equazione di partenza hanno parte reale $\neq 0$.

Lina Conti, Francesco Daddi - 9 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 27. *Determinare i numeri z tali che*

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \ .$$

Soluzione. *Primo metodo.* Osserviamo che il numero complesso $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ può essere scritto nel modo seguente:

$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

quindi le due radici quadrate sono

$$z_{1;2} = \pm\sqrt{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \ ;$$

dalla formula di bisezione del coseno (presa con il segno "+" perché $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$) ricaviamo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

applicando la formula per i radicali doppi abbiamo

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

per cui risulta:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \ .$$

Per calcolare $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ basta applicare la formula fondamentale (si sceglie il segno "+" perché $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$):

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^2} = \sqrt{1-\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]^2} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{12}}{8}} = \sqrt{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{12}}$$

con la formula per i radicali doppi abbiamo:

$$\sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-12}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-12}}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{3}-1$$

da cui

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{1}{8}}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \ ;$$

in definitiva le due soluzioni sono

$$z_{1;2} = \pm \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right) .$$

Secondo metodo. Cerchiamo le soluzioni nella forma $z = x + iy$; risulta:

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad (x+iy)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2\,ixy = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria arriviamo al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\,xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ricavando y dalla seconda equazione e sostituendo nella prima abbiamo:

$$\begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{1}{4\,x}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{4\,x} \end{cases}$$

la prima equazione può essere riscritta così:

$$16\,x^4 - 8\,\sqrt{3}\,x^2 - 1 = 0$$

ponendo $t = x^2 \geq 0$ possiamo scrivere le soluzioni dell'equazione di secondo grado nell'incognita t:

$$t_{1;2} = \frac{8\,\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(-8\,\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-1)}}{32} = \frac{\sqrt{3} \pm 2}{4}$$

poiché $t \geq 0$, è accettabile solo la soluzione con il "+" (infatti con il segno "-" il radicando sarebbe uguale a $\sqrt{3} - 2 < 0$). A questo punto possiamo trovare i due valori di x:

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

con la formula per i radicali doppi (si veda per questo il primo metodo) arriviamo a

$$x_{1;2} = \pm \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right) \;;$$

i due valori di y si ottengono dalla relazione $y = \dfrac{1}{4\,x}$:

$$y_1 = \frac{1}{4 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{4 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} .$$

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 28. *Calcolare*

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^{1005}$$

Soluzione. Il numero tra parentesi può essere scritto in questo modo:

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\cos\left(\frac{7}{12}\,\pi\right)+i\,\sin\left(\frac{7}{12}\,\pi\right)$$

per cui la potenza è uguale a

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^{1005}=\left[\cos\left(\frac{7}{12}\,\pi\right)+i\,\sin\left(\frac{7}{12}\,\pi\right)\right]^{1005}=$$

$$=\cos\left(1005\cdot\frac{7}{12}\,\pi\right)+i\,\sin\left(1005\cdot\frac{7}{12}\,\pi\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{2345}{4}\,\pi\right)+i\,\sin\left(\frac{2345}{4}\,\pi\right)\ ;$$

poiché $\dfrac{2345}{4}\,\pi=586\,\pi+\dfrac{\pi}{4}=2\cdot 293\,\pi+\dfrac{\pi}{4}$ abbiamo:

$$\cos\left(\frac{2345}{4}\,\pi\right)+i\,\sin\left(\frac{2345}{4}\,\pi\right)=$$

$$=\cos\left(2\cdot 293\,\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(2\cdot 293\,\pi+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Francesco Daddi - 30 dicembre 2009

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 29. *Risolvere l'equazione*

$$z^5 - 2\,iz^4 + 3\,z^3 - 8\,iz^2 - 16\,z - 24\,i = 0$$

sapendo che $z = -i$ e $z = 3\,i$ sono due soluzioni.

Soluzione. Dal momento che conosciamo le soluzioni $z = -i$ e $z = 3\,i$, il polinomio di quinto grado è divisibile per il polinomio

$$(z+i)(z-3\,i) = z^2 - 2\,iz + 3\;;$$

effettuando la divisione otteniamo:

$$z^5 - 2\,iz^4 + 3\,z^3 - 8\,iz^2 - 16\,z - 24\,i = (z^2 - 2\,iz + 3)\cdot(z^3 - 8\,i)$$

per ottenere le rimanenti soluzioni dell'equazione di partenza è sufficiente quindi determinare le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 8\,i = 0$$

per far ciò basta determinare le radici terze di $8\,i = 8\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$:

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right] = \sqrt{3} + i\;;$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{5\,\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\,\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right] = -\sqrt{3} + i\;;$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right] = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\,\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot[0 - i] = -2\,i\;.$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 5 gennaio 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 30. *Risolvere l'equazione*

$$\exp(\exp z) = i$$

Soluzione. Ponendo $w = \exp z$ l'equazione diventa

$$\exp w = i$$

da cui, essendo $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, ricaviamo:

$$w = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$w = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\ .$$

Ora dobbiamo risolvere l'equazione

$$\exp z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

il modulo del numero complesso a secondo membro è

$$\left|i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right)\right| = |i| \cdot \left|\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right| = \left|\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right| = \pi\,\left|\frac{1}{2} + 2\,k\right| = \frac{\pi}{2}\,|4\,k+1|$$

mentre per l'argomento dobbiamo fare attenzione: se il numero complesso $i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right)$ appartiene all'asse immaginario positivo l'argomento è $\frac{\pi}{2}$, mentre, se appartiene all'asse immaginario negativo, l'argomento è $\frac{3\,\pi}{2}$:

$$\operatorname{Arg}\left(i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se } k \geq 0 \\[2ex] \dfrac{3\,\pi}{2} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

quindi le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{2}\,|4\,k+1|\right) + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} \geq 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}\ \ ;$$

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{2}\,|4\,k+1|\right) + i\,\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} < 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}$$

semplificando otteniamo:

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{2}\,(4\,k+1)\right) + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} \geq 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}\ \ ;$$

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{2}\,(-4\,k-1)\right) + i\,\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} < 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 31. *Determinare i numeri z tali che*

$$z^5 + z^3(1 - i\sqrt{3}) - 27\, z^2 - 27 + 27\,\sqrt{3}\, i = 0 \ \ .$$

Soluzione. Possiamo fattorizzare il primo membro nel modo seguente:

$$z^3\left(z^2 + 1 - i\sqrt{3}\right) - 27\left(z^2 + 1 - i\sqrt{3}\right) = 0$$

da cui

$$\left(z^3 - 27\right)\left(z^2 + 1 - i\sqrt{3}\right) = 0$$

dobbiamo quindi risolvere le due equazioni

$$z^3 - 27 = 0 \quad ; \quad z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0\ .$$

La prima equazione ha come soluzioni le radici terze di 27:

$$z_1 = 3 \quad ; \quad z_2 = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad z_3 = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ ;$$

per quanto riguarda la seconda equazione osserviamo che

$$z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow \ z^2 = -1 + i\sqrt{3} \ \Rightarrow$$

$$z^2 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \Rightarrow \ z^2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)\right]$$

l'equazione $z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0$ è dunque risolta per

$$z_{4+k} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\pi}{2}\right)\right] \quad (\text{con } k = 0, 1)$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad ; \quad z_5 = -z_4 = -\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ovvero

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad z_5 = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

semplificando otteniamo:

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \quad ; \quad z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\ .$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 32. *Determinare i numeri z tali che*

$$\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\,\exp z + |z|\,\Big(\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\,\exp z\Big) = 0\ \ .$$

Soluzione. Raccogliendo $\big(\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\,\exp z\big)$ l'equazione diventa

$$\Big(\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\,\exp z\Big)\,(1 + |z|) = 0$$

dobbiamo quindi risolvere le due equazioni seguenti:

$$\exp^2 z + (-1 + i\sqrt{3})\,\exp z = 0\ \ ;\ \ 1 + |z| = 0$$

la seconda equazione è impossibile (il modulo di un numero complesso è un numero reale ≥ 0), mentre per quanto riguarda la prima equazione si ha

$$\exp z\,\Big(\exp z + \Big(-1 + i\sqrt{3}\Big)\Big) = 0$$

si hanno quindi due equazioni:

$$\exp z = 0\ \ \Rightarrow\ \ \text{impossibile}$$

$$\exp z + \Big(-1 + i\sqrt{3}\Big) = 0\ \ \Rightarrow\ \ \exp z = 1 - i\sqrt{3}$$

poiché

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\,\pi}{3} + i\sin\frac{5\,\pi}{3}\right)$$

abbiamo

$$z_k = \ln(2) + i\left(\frac{5\,\pi}{3} + 2\,k\pi\right)\ \ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 33. *Determinare i numeri z tali che*

$$\exp(z)\exp^2(2\,z)+2\exp(z)\exp(2\,z)+\exp(z)=0\ \ .$$

Soluzione. Mettiamo in evidenza $\exp(z)$:

$$\exp(z)\left[\exp^2(2\,z)+2\exp(2\,z)+1\right]=0$$

poiché $\exp(z)$ non si annulla mai l'equazione iniziale è equivalente a

$$\exp^2(2\,z)+2\exp(2\,z)+1=0$$

a questo punto si osserva che l'equazione può essere scritta così:

$$[\exp(2\,z)+1]^2=0$$

non resta quindi che risolvere l'equazione $\exp(2\,z)+1=0$:

$$\exp(2\,z)=-1$$

dal momento che $-1=1\cdot(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$, risulta:

$$2\,z=\ln(1)+i(\pi+2\,k\pi)\quad\text{con}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

$$2\,z=i(\pi+2\,k\pi)\quad\Rightarrow\quad z=\frac{1}{2}\cdot i(\pi+2\,k\pi)$$

in definitiva le soluzioni dell'equazione iniziale sono le seguenti:

$$z_k=\frac{\pi}{2}\,i(1+2\,k)\quad\text{con}\ \ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 34. *Determinare i numeri z, w tali che*

$$\begin{cases} \exp z \cdot \exp w = -1 + i \\ \exp z + \exp w = -1 - 2\,i \end{cases} .$$

Soluzione. Si tratta di un sistema simmetrico la cui equazione risolvente è

$$t^2 + (1 + 2\,i)\,t + (-1 + i) = 0$$

trovando le soluzioni dell'ultima equazione scritta abbiamo

$$t_{1;2} = \frac{-1 - 2\,i \pm \sqrt{(1 + 2\,i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + i)}}{2}$$

quindi

$$t_{1;2} = \frac{-1 - 2\,i \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow \quad t_1 = \dfrac{-1 - 2\,i + 1}{2} = \dfrac{-2\,i}{2} = -i \\ \searrow \quad t_2 = \dfrac{-1 - 2\,i - 1}{2} = \dfrac{-2 - 2\,i}{2} = -1 - i \end{array}$$

ora non resta che risolvere i sistemi

$$\begin{cases} \exp(z) = -i \\ \exp(w) = -1 - i \end{cases} ; \quad \begin{cases} \exp(z) = -1 - i \\ \exp(w) = -i \end{cases} .$$

Il primo sistema ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} z = i\left(\dfrac{3\,\pi}{2} + 2\,k\pi\right) \\ w = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{5\,\pi}{4} + 2\,h\pi\right) \end{cases} \quad \text{con } k, h \in \mathbb{Z}$$

mentre per il secondo sistema risulta:

$$\begin{cases} z = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{5\,\pi}{4} + 2\,b\pi\right) \\ w = i\left(\dfrac{3\,\pi}{2} + 2\,c\pi\right) \end{cases} \quad \text{con } b, c \in \mathbb{Z}$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 4 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 35. *Determinare i numeri z tali che*

$$|z|z^3 + z^3 - 8|z|\,i - 8\,i = 0\ .$$

Soluzione. Mettiamo in evidenza z^3 nei primi due termini e $-8\,i$ negli ultimi due:

$$z^3(|z|+1) - 8\,i(|z|+1) = 0$$

raccogliamo ora $(|z|+1)$

$$(|z|+1)(z^3 - 8\,i) = 0$$

le soluzioni si ottengono quindi dalle due equazioni seguenti:

$$|z|+1 = 0\ \ ;\ \ z^3 - 8\,i = 0\ .$$

La prima equazione è impossibile in quanto il modulo di un numero complesso è un numero reale ≥ 0.

Per quanto riguarda invece la seconda equazione si tratta di calcolare le radici terze di $8\,i$:

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\,k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\,k\pi}{3}\right)\right] \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

abbiamo allora le seguenti soluzioni:

$$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right) = \sqrt{3}+i$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right) = -\sqrt{3}+i$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right] = 2\,(-i) = -2\,i\ .$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 9 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 36. *Risolvere l'equazione*

$$\exp(\exp z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

Soluzione. Ponendo $w = \exp z$ l'equazione diventa

$$\exp w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

da cui, essendo $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}$, ricaviamo:

$$w = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$w = i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\ .$$

Ora dobbiamo risolvere l'equazione

$$\exp z = i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

il modulo del numero complesso a secondo membro è

$$\left| i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right)\right| = |i| \cdot \left|\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right| = \left|\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right| = \pi\,\left|\frac{1}{6} + 2\,k\right| = \frac{\pi}{6}\,|12\,k + 1|$$

mentre per l'argomento dobbiamo fare attenzione: se il numero complesso $i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right)$ appartiene all'asse immaginario positivo l'argomento è $\frac{\pi}{2}$, mentre, se appartiene all'asse immaginario negativo, l'argomento è $-\frac{\pi}{2}$:

$$\mathrm{Arg}\left(i\left(\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } k \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

quindi le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{6}\,|12\,k + 1|\right) + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} \geq 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}\ ;$$

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{6}\,|12\,k + 1|\right) + i\,\left(-\frac{\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} < 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}$$

semplificando otteniamo:

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{6}\,(12\,k + 1)\right) + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} \geq 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}\ ;$$

$$z = \ln\left(\frac{\pi}{6}\,(-12\,k - 1)\right) + i\,\left(-\frac{\pi}{2} + 2\,h\pi\right) \quad \text{con } k \text{ intero} < 0 \text{ e } h \in \mathbb{Z}$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 9 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 37. *Risolvere l'equazione*

$$\exp(8\,z) + (2-i)\exp(4\,z) - 2\,i = 0$$

Soluzione. Possiamo riscrivere l'equazione così:

$$\big(\exp(4\,z)\big)^2 + (2-i)\exp(4\,z) - 2\,i = 0$$

ponendo $w = \exp(4\,z)$ si tratta di risolvere l'equazione

$$w^2 + (2-i)w - 2\,i = 0$$

le soluzioni si calcolano con la formula classica

$$w_{1;2} = \frac{-(2-i) \pm \sqrt{(2-i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2\,i)}}{2\cdot 1} = \frac{i-2 \pm \sqrt{4-1-4\,i+8\,i}}{2} = \frac{i-2 \pm \sqrt{3+4\,i}}{2}$$

a questo punto dobbiamo determinare le radici quadrate del numero $3+4\,i$; dobbiamo determinare i numeri complessi $x+i\,y$ tali che $(x+i\,y)^2 = 3+4\,i$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2\,xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 3\,x^2 - 4 = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

risolvendo l'equazione biquadratica otteniamo $x_1 = 2$ (da cui $y_1 = 1$) e $x_2 = -2$ (da cui $y_2 = -1$). Si osservi che $x, y \in \mathbb{R}$, quindi le soluzioni complesse del sistema precedente devono essere scartate.

Le soluzioni $w_{1;2}$, pertanto, sono:

$$w_1 = i \ \ ; \ \ w_2 = -2$$

a questo punto dobbiamo risolvere le equazioni

$$\exp(4\,z) = i \ \ ; \ \ \exp(4\,z) = -2$$

la prima ha come soluzioni

$$4\,z = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi\right) \ \Rightarrow \ z = i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) \ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

mentre la seconda

$$4\,z = \ln(2) + i\,(\pi + 2\,k\pi) \ \Rightarrow \ z = \frac{\ln(2)}{4} + i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) \ \text{ con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Lina Conti, Francesco Daddi - 19 marzo 2010

Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 38. *Risolvere l'equazione*

$$z^2+\bar{z}+1=0$$

Soluzione. Posto $z=x+i\,y$ abbiamo:

$$(x+i\,y)^2+x-i\,y+1=0$$

svolgendo i calcoli abbiamo

$$x^2-y^2+2\,ixy+x-i\,y+1=0$$

separiamo la parte reale dalla parte immaginaria:

$$x^2-y^2+x+1+i\,(2\,xy-y)=0$$

arriviamo dunque al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+1=0 \\ 2\,xy-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2+x+1=0 \\ y(2\,x-1)=0 \end{cases}$$

basta risolvere i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2-y^2+x+1=0 \\ 2\,x-1=0 \end{cases}$$

il primo sistema è impossibile (l'equazione $x^2+x+1=0$, infatti, non ammette soluzioni reali), mentre il secondo sistema ha per soluzione

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+1=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2+\dfrac{1}{2}+1=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4}-y^2=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

le soluzioni dell'equazione iniziale, pertanto, sono le seguenti:

$$z_1=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{7}}{2} \quad ; \quad z_2=\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{7}}{2}\,.$$