Francesco Daddi - www.webalice.it/francesco.daddi

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 1. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale t:*

$$\begin{cases} -t\,x + (t-1)y + z = 1 \\ (t-1)y + t\,z = 1 \\ 2\,x + z = 5 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det \begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 \\ 0 & t-1 & t \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = t^2 - 3\,t + 2$$

quindi si annulla per $t = 1$ e $t = 2$.

Se $t \neq 1 \wedge t \neq 2$ si ha un'unica soluzione (il sistema è quadrato); con il metodo di Cramer si ottiene:

$$(x, y, z)^T = \left(\frac{5\,t - 5}{t - 2}\,;\, \frac{5\,t^2 + t - 2}{t^2 - 3\,t + 2}\,;\, \frac{5\,t}{2 - t} \right)^T \quad . \tag{2}$$

I valori $t = 1$ e $t = 2$ devono essere studiati separatamente:

• per $t = 1$ il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} -x + z = 1 \\ z = 1 \\ 2\,x + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema impossibile}$$

• per $t = 2$ il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} -2\,x + y + z = 1 \\ y + 2\,z = 1 \\ 2\,x + z = 5 \end{cases}$$

con l'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ sistema impossibile}$$

In definitiva abbiamo:

$$\begin{cases} \text{se } \ t \neq 1 \wedge t \neq 2 \ \text{ il sistema ha un'unica soluzione (si veda la (2));} \\ \text{se } \ t = 1 \vee t = 2 \ \text{ il sistema è impossibile.} \end{cases}$$

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 2. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x+y+kz=2 \\ x+y+3\,z=k-1 \\ 2\,x+ky-z=1 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix} = k^2-5\,k+6$$

quindi si annulla per $k=2$ e $k=3$.

Se $k \neq 2 \wedge k \neq 3$ si ha un'unica soluzione (il sistema è quadrato); con il metodo di Cramer si ottiene:

$$(x,y,z)^T = \left(\frac{k(k+2)}{k-2}\,;\, \frac{-2\,k-4}{k-2}\,;\, -1 \right)^T \,. \tag{2}$$

I valori $k=2$ e $k=3$ devono essere studiati separatamente:

• per $k=2$ il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} x+y+2\,z=2 \\ x+y+3\,z=1 \\ 2\,x+2\,y-z=1 \end{cases}$$

con l'eliminazione di Gauss otteniamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{sistema impossibile ;}$$

• per $k=3$ il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} x+y+3\,z=2 \\ x+y+3\,z=2 \\ 2\,x+3\,y-z=1 \end{cases}$$

con l'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ponendo $z = t$ (parametro libero) otteniamo le soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 10\,t \\ -3 + 7\,t \\ t \end{pmatrix} . \tag{3}$$

In definitiva abbiamo:

$$\begin{cases} \text{se } \; k \neq 2 \wedge k \neq 3 \; \text{ il sistema ha un'unica soluzione (si veda la (2));} \\ \text{se } \; k = 2 \; \text{ il sistema è impossibile;} \\ \text{se } \; k = 3 \; \text{ il sistema ha } \infty^1 \text{ soluzioni (si veda la (3)).} \end{cases}$$

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 3. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ 4\,x + 2\,y = -k \\ 6\,x + 3\,y = -3 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione. Il determinante della matrice completa è

$$\det \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -k \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3\,k^2 - 12\,k + 12 = 3\,(k-2)^2$$

quindi si annulla solo per $k = 2$.

Se $k \neq 2$ il sistema è impossibile (infatti, se $k \neq 2$, il rango della matrice completa è 3, mentre il rango della matrice dei coefficienti, essendo 3×2, è ≤ 2 per ogni $k \in \mathbb{R}$).

Resta da analizzare il caso $k = 2$: ponendo $k = 2$ nel sistema (1) abbiamo

$$\begin{cases} 2\,x + y = -1 \\ 4\,x + 2\,y = -2 \\ 6\,x + 3\,y = -3 \end{cases}$$

con l'eliminazione di Gauss risulta:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ponendo $y = t$ (parametro libero) abbiamo le seguenti soluzioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1-t}{2} \\ t \end{pmatrix} . \tag{2}$$

In definitiva abbiamo:

$$\begin{cases} \text{se } k \neq 2 & \text{il sistema è impossibile;} \\ \text{se } k = 2 & \text{il sistema ha } \infty^1 \text{ soluzioni (si veda la (2)).} \end{cases}$$

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 4. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+kz=k \\ x+(k-1)y=0 \\ x+(k-1)y+kz=k \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione. Il determinante della matrice completa è

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix} = k^2 - 2\,k = k(k-2)$$

quindi si annulla per $k=0$ e per $k=2$.

Se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$ il sistema è impossibile. Ora dobbiamo analizzare i due casi $k=0$ e $k=2$.

• Ponendo $k=0$ nel sistema (1) abbiamo:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=0 \\ x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

con l'eliminazione di Gauss risulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

si ha quindi un'unica soluzione: $x=y=z=0$.

• Per $k=2$ il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+2\,z=2 \\ x+y=0 \\ x+y+2\,z=2 \end{cases}$$

con l'eliminazione di Gauss risulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ sistema impossibile}$$

In definitiva abbiamo:

$$\begin{cases} \text{se } k \neq 0 \text{ il sistema è impossibile;} \\ \text{se } k = 0 \text{ il sistema ha un'unica soluzione } (x,y,z)^T = (0,0,0)^T. \end{cases}$$

Si osservi che il caso $k=2$ è compreso nel caso $k \neq 0$.

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 5. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali k, h:*

$$\begin{cases} x+2\,y-2\,z=0 \\ x-y-z=-2\,h \\ 2\,x+k\,y-2\,z=-1 \end{cases} \qquad (1)$$

<u>**Soluzione.**</u> Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & k & -2 \end{pmatrix} = -k-2$$

e quindi si annulla per $k=-2$: il sistema ammette pertanto un'unica soluzione se e solo se $k \neq -2$; con il metodo di Cramer si ricava

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4(h\,k-2\,h+1)}{k+2} \\ y=\dfrac{4\,h-1}{k+2} \\ z=-\dfrac{2\,h\,k-8\,h+3}{k+2} \end{cases} \qquad (2)$$

Andiamo a studiare il caso $k=-2$: la matrice completa è $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2\,h \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$, seguendo l'algoritmo di Gauss troviamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2\,h \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2\,h \\ 0 & 0 & 0 & 4\,h-1 \end{array}\right)$$

il sistema ammette soluzioni se e solo se $4\,h-1=0$, ovvero se e solo se $h=\dfrac{1}{4}$. Con questo valore di h il sistema ammette le soluzioni

$$\begin{cases} x=4\,t-1 \\ y=t \\ z=3\,t-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{con } t\in\mathbb{R}\,. \qquad (3)$$

In definitiva abbiamo:

$$\begin{cases} \text{se } k\neq -2 \text{ il sistema ammette un'unica soluzione (si veda la (2));} \\ \text{se } k=-2 \wedge h=\dfrac{1}{4} \text{ il sistema ha } \infty^1 \text{ soluzioni (si veda la (3));} \\ \text{se } k=-2 \wedge h\neq\dfrac{1}{4} \text{ il sistema è impossibile .} \end{cases}$$

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 6. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali k, h:*

$$\begin{cases} x - 2\,y = 0 \\ 2\,x + 2\,h\,y = 1 \\ x + k\,y = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione. Il determinante della matrice completa è

$$\det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2\,h & 1 \\ 1 & k & 1 \end{array} \right) = 2\,h - k + 2$$

se $2\,h - k + 2 \neq 0$ il sistema risulta impossibile (infatti la matrice dei coefficienti ha rango ≤ 2, mentre la matrice completa ha rango pari a 3).

Resta ora da analizzare il caso $2\,h - k + 2 = 0$: ricavando k abbiamo $k = 2\,h + 2$, sostituendo nella matrice completa ed effettuando due passaggi dell'algoritmo di Gauss si ha:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2\,h & 1 \\ 1 & 2\,h+2 & 1 \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2\,h+4 & 1 \\ 0 & 2\,h+4 & 1 \end{array} \right)$$

la terza equazione può essere trascurata, quindi basta studiare la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2\,h+4 & 1 \end{array} \right) \; ;$$

se $h = -2$ (da cui $k = 2 \cdot (-2) + 2 = -2$) il sistema risulta impossibile;
se $h \neq -2$ il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{h+2} \\ \\ y = \dfrac{1}{2(h+2)} \end{cases} . \tag{2}$$

In definitiva:

$$\begin{cases} \text{se } \; k \neq 2\,h + 2 \; \text{ il sistema è impossibile;} \\ \text{se } \; h = -2 \wedge k = -2 \; \text{ il sistema è impossibile;} \\ \text{se } \; h \neq -2 \wedge k = 2\,h + 2 \; \text{ il sistema ammette un'unica soluzione (si veda la (2))} \end{cases}$$

Esercizi svolti sui sistemi lineari

Esercizio 7. *Risolvere il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali k, h:*

$$\begin{cases} x+h\,y+k\,z=k \\ k\,x+z=0 \\ x+h\,y+z=2 \end{cases} \tag{1}$$

<u>**Soluzione.**</u> Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & h & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix} = k\,h\,(k-1)\ ;$$

se $k \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge h \neq 0$ il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k-2}{k(1-k)} \\[2ex] y = \dfrac{k+2}{k\,h} \\[2ex] z = \dfrac{k-2}{k-1} \end{cases} \tag{2}$$

Analizziamo ora i tre casi particolari.

Caso $k=0$: sostituendo nella matrice completa e seguendo l'algoritmo di Gauss si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

dalla terza riga segue che il sistema è impossibile.

Caso $k=1$: sostituendo nella matrice completa e seguendo l'algoritmo di Gauss si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & -h & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dalla terza riga segue che il sistema è impossibile.

Caso $h=0$: sostituendo nella matrice completa e seguendo due passaggi dell'algoritmo di Gauss si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k^2 \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k^2 \end{array}\right)$$

a questo punto, supponendo $k \neq 1$ (il caso $k = 1$ è stato già studiato), possiamo effettuare l'ultimo passaggio dell'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k^2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & -k-2 \end{array}\right)$$

si hanno soluzioni se $-k-2=0$, ovvero se $k=-2$; in tal caso le soluzioni sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = t \qquad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases} \tag{3}$$

In definitiva:

$$\begin{cases} \text{se } k \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge h \neq 0 \text{ il sistema ammette un'unica soluzione data dalla (2) ;} \\ \text{se } k = 0 \text{ il sistema è impossibile;} \\ \text{se } k = 1 \text{ il sistema è impossibile;} \\ \text{se } h = 0 \wedge k = -2 \text{ il sistema ammette } \infty^1 \text{ soluzioni, fornite dalla (3);} \\ \text{se } h = 0 \wedge k \neq -2 \text{ il sistema è impossibile.} \end{cases}$$