Francesco Daddi - 20 dicembre 2009

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 1. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \; .$$

<u>Soluzione.</u> Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\lim_{x\to 0} \, \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \, \frac{2}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \, 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}$$

a questo punto, ponendo $y = 2\,x$, dato che

$$\lim_{y\to 0} \, \frac{\sin y}{y} = 1$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \, 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y\to 0} \, 2 \cdot \frac{\sin y}{y} =$$

$$= 2 \cdot 1 = 2 \; .$$

Francesco Daddi - 20 dicembre 2009

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \, .$$

<u>Soluzione.</u> Moltiplichiamo e dividiamo per $(1+\cos x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

poiché risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \, .$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin(4x)} \, .$$

Soluzione. Riscriviamo il limite in questo modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} (1-\cos x) \cdot \frac{1}{\sin(4x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot (1-\cos x) \cdot \frac{4x}{4x} \cdot \frac{1}{\sin(4x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{4} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)}$$

dal momento che risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin(4x)} = 1$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{4} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} = 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 \, .$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 4. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\,x^2}\,.$$

<u>**Soluzione.**</u> Il numeratore è una differenza di cubi, per cui abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{3\,x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3\,x^2}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)$$

poiché risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \big(1+\cos x+\cos^2 x\big) = 1+1+1^2 = 3$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 5. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{1-\cos(3x)}\,.$$

Soluzione. Riscriviamo il limite in questo modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{1-\cos(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\,x^2}{4\,x^2}\cdot\sin^2(2x)\cdot\frac{9\,x^2}{9\,x^2}\cdot\frac{1}{1-\cos(3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 4\,x^2\cdot\frac{\sin^2(2x)}{4\,x^2}\cdot\frac{1}{9\,x^2}\cdot\frac{9\,x^2}{1-\cos(3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{\sin(2x)}{2\,x}\right)^2\cdot\frac{(3\,x)^2}{1-\cos(3x)}$$

dal momento che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2\,x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(3\,x)^2}{1-\cos(3x)} = 2$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{\sin(2x)}{2\,x}\right)^2\cdot\frac{(3\,x)^2}{1-\cos(3x)} = \frac{4}{9}\cdot 1^2\cdot 2 = \frac{8}{9}\,.$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 6. *Calcolare*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos(5x)}}{x} \, .$$

Soluzione. Portiamo la x dentro la radice, facendo molta attenzione al fatto che, trattandosi di un limite per $x \to 0^-$, la x è negativa:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos(5x)}}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{\frac{1-\cos(5x)}{x^2}}$$

moltiplichiamo e dividiamo dentro la radice per 25:

$$\lim_{x \to 0^-} -\sqrt{\frac{25}{25} \cdot \frac{1-\cos(5x)}{x^2}} = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{25 \cdot \frac{1-\cos(5x)}{25\,x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{25 \cdot \frac{1-\cos(5x)}{(5\,x)^2}} = -\sqrt{25 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \, .$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 7. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-e^{(1-x)^2}}{3\,(x-1)^2}\,.$$

Soluzione. Mettendo un "meno" in evidenza e, osservando che $(1-x)^2 = (x-1)^2$, possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-e^{(1-x)^2}}{3\,(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \; -\frac{e^{(x-1)^2}-1}{3\,(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \; -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{(x-1)^2}-1}{(x-1)^2}$$

ponendo ora $y = x-1$ abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \; -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{(x-1)^2}-1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 0} \; -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{y^2}-1}{y^2}$$

ponendo ora $z = y^2$ abbiamo

$$\lim_{y\to 0} \; -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{y^2}-1}{y^2} = \lim_{z\to 0} \; -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{z}-1}{z} = -\frac{1}{3}\cdot 1 = -\frac{1}{3}\,.$$

Francesco Daddi - 21 dicembre 2009

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 8. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+2\,x)}{(2\cos(3\,x)-2)\,\sin x}\,.$$

Soluzione. Riscriviamo il limite nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1-\cos(3\,x)}\cdot\ln(1+2\,x)\cdot\frac{1}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}\cdot\frac{9\,x^2}{9\,x^2}\cdot\frac{1}{1-\cos(3\,x)}\cdot\frac{2\,x}{2\,x}\cdot\ln(1+2\,x)\cdot\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{9\,x^2}\cdot\frac{9\,x^2}{1-\cos(3\,x)}\cdot 2\,x\cdot\frac{\ln(1+2\,x)}{2\,x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{9\,x^2}\cdot 2\,x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{9\,x^2}{1-\cos(3\,x)}\cdot\frac{\ln(1+2\,x)}{2\,x}\cdot\frac{x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{9}\cdot\frac{9\,x^2}{1-\cos(3\,x)}\cdot\frac{\ln(1+2\,x)}{2\,x}\cdot\frac{x}{\sin x} =$$

$$-\frac{1}{9}\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = -\frac{2}{9}\,.$$