Istituto Superiore “XXV aprile” Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Esercizi sui fasci di sfere

4^aC Liceo Scientifico - 22/03/2014

Esercizio 1. Sono dati il piano $\pi : 2x + y + z = 0$ e il suo punto $P(1\,;\,0\,;\,-2)$;
a) scrivere l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di sfere tangenti a π nel punto P;
b) determinare il luogo geometrico dei centri di tali sfere;
c) trovare l'equazione delle sfere del fascio $\mathcal{F}$ aventi raggio pari a 5;
d) trovare l'equazione dell'eventuale sfera del fascio $\mathcal{F}$ passante per $Q(2\,;\,-1\,;\,0)$;
e) trovare l'equazione dell'eventuale sfera del fascio $\mathcal{F}$ avente centro sul piano $\alpha : y - z = 6$;
f) trovare l'equazione dell'eventuale sfera del fascio $\mathcal{F}$ avente centro sul piano $\beta : x + y + z = 0$;
g) trovare l'equazione dell'eventuale sfera del fascio $\mathcal{F}$ avente centro sulla retta $s : \begin{cases} x = y \\ y = 3z - 1 \end{cases}$;
h) trovare l'equazione dell'eventuale sfera del fascio $\mathcal{F}$ avente centro sulla retta $t : \begin{cases} x = 3y \\ x = -3z \end{cases}$.

Esercizio 2. Si consideri la circonferenza $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$;
si determini il centro e il raggio di γ.
Tra tutte le sfere contenenti γ determinare:
a) le equazioni delle eventuali sfere passanti per $A(1;1;0)$;
b) le equazioni delle eventuali sfere aventi raggio uguale a 11;
c) le equazioni delle eventuali sfere tangenti al piano $\alpha : x + 1 = 0$;
d) le equazioni delle eventuali sfere tangenti alla retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = z - 1 \end{cases}$;
e) le equazioni delle eventuali sfere aventi centro sul piano $\beta : x - 2y - z - 6 = 0$;
f) le equazioni delle eventuali sfere tali che l'intersezione con il piano $\sigma : x - z = 0$ sia una circonferenza di raggio 2;
g) le equazioni delle eventuali sfere tali che l'intersezione con il piano $\sigma : x - z = 0$ sia una circonferenza di raggio $2\sqrt{2}$;
h) quella di raggio minimo.

Svolgimento degli esercizi sui fasci di sfere

4^aC Liceo Scientifico - 22/03/2014

Soluzione dell’esercizio 1.

a) Consideriamo la sfera di centro P e raggio nullo:

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=0$$

il fascio si ottiene nel modo seguente:

$$\mathcal{F}: (x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2+\lambda(2x+y+z)=0 \tag{1}$$

svolgendo i calcoli si trova

$$\mathcal{F}: x^2+y^2+z^2+(2\lambda-2)x+\lambda y+(4+\lambda)z+5=0\,. \tag{2}$$

b) Il luogo dei centri delle sfere $\in \mathcal{F}$ è la retta r avente equazioni parametriche

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,; \tag{3}$$

scriviamo ora delle equazioni cartesiane per r:

$$\begin{cases} x=1+2\mu \\ y=\mu \\ z=-2+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu=\dfrac{x-1}{2} \\ \mu=y \\ \mu=z+2 \end{cases}$$

se ora uguagliamo la prima equazione con la seconda e la seconda con la terza abbiamo delle equazioni cartesiane per la retta r:

$$r: \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=y \\ y=z+2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}.$$

c) Sfruttando l’equazione (2), possiamo completare i quadrati:

$$(x+\lambda-1)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(z+\frac{4+\lambda}{2}\right)^2=(\lambda-1)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{4+\lambda}{2}\right)^2-5$$

il raggio della generica sfera è

$$R_\lambda=\sqrt{(\lambda-1)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{4+\lambda}{2}\right)^2-5}=\frac{\sqrt{6}}{2}|\lambda|\,;$$

imponendo che il raggio sia pari a 5 abbiamo

$$\frac{\sqrt{6}}{2}|\lambda|=5 \Rightarrow \lambda_1=\frac{5\sqrt{6}}{3}\ ;\ \lambda_2=-\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

sostituendo questi valori nell’equazione del fascio troviamo le due sfere:

$$\Gamma_1: x^2+y^2+z^2+\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}-2\right)x+\frac{5\sqrt{6}}{3}y+\left(4+\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)z+5=0\ ;$$

$$\Gamma_2: x^2+y^2+z^2+\left(-\frac{10\sqrt{6}}{3}-2\right)x-\frac{5\sqrt{6}}{3}y+\left(4-\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)z+5=0\ .$$

d) Basta sostituire le coordinate del punto $Q(2\,;-1\,;0)$ ([1]) nell’equazione del fascio (1):

$$\mathcal{F}: (2-1)^2+(-1-0)^2+(0+2)^2+\lambda(2\cdot 2+(-1)+0)=0 \Rightarrow 6+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$$

sostituendo $\lambda=-2$ nell’equazione del fascio $\mathcal{F}$ ricaviamo l’equazione della sfera:

$$x^2+y^2+z^2-6x-2y+2z+5=0\,.$$

[1] si osservi che il problema ha soluzione in quanto $Q \notin \pi$

e) Poiché il piano $\alpha : y - z = 6$ risulta parallelo alla retta r avente equazioni parametriche date dalla (3) ([2]), il problema non ha soluzione: non ci sono sfere $\in \mathcal{F}$ con centro sul piano α.

f) Intersecando la retta r con il piano β si ottiene:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = -2 + \mu \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = -2 + \mu \\ 1 + 2\mu + \mu - 2 + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = -2 + \mu \\ \mu = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \\ z = -\dfrac{7}{4} \\ \mu = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

il centro della sfera è perciò il punto $C\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{7}{4}\right)$; l'equazione della sfera si determina osservando che il centro è C e il raggio è $\overline{CP}$:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-2 + \frac{7}{4}\right)^2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}z + 5 = 0$$

g) Si tratta di intersecare la retta r con la retta s:

$$\begin{cases} x = y \\ y = 3z - 1 \\ x - 2y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema impossibile}$$

non ci sono quindi sfere con le proprietà desiderate.

h) Si tratta di intersecare la retta r con la retta t:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 3y = -3z \\ x - 2y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

l'equazione della sfera si trova osservando che passa dal punto P e che ha centro nel punto $(3, 1, -1)$:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = (1 - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (-2 + 1)^2$$

da cui otteniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + 5 = 0 .$$

Soluzione dell'esercizio 2.

Calcoliamo il centro e il raggio della sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ con il metodo del completamento del quadrato:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + (z - 1)^2 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

si arriva quindi a

$$C(2; -1; 1) \;;\; R = \sqrt{9} = 3 .$$

[2]ciò è equivalente ad affermare che il sistema $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \\ y - z = 6 \end{cases}$ è impossibile

Indicando con π il piano di equazione cartesiana $x+2y-2z+6=0$, la circonferenza γ ha raggio r pari a

$$r=\sqrt{R^2-[d(C,\pi)]^2}=\sqrt{3^2-\left[\frac{|2+2\cdot(-1)-2\cdot 1+6|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}\right]^2}=$$

$$=\sqrt{9-\left[\frac{4}{3}\right]^2}=\sqrt{9-\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{81-16}{9}}=\frac{\sqrt{65}}{3}\ ;$$

per trovarne il centro di γ (che indichiamo con C_γ) è sufficiente intersecare il piano π con la retta s passante per C e ortogonale a π:

$$s:\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}; \tag{4}$$

sostituendo le equazioni di s nell'equazione di $\pi: x+2y-2z+6=0$ si trova

$$2+t+2\cdot(-1+2t)-2\cdot(1-2t)+6=0\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{4}{9}\quad\Rightarrow\quad C_\gamma=\left(\frac{14}{9};-\frac{17}{9};\frac{17}{9}\right).$$

Per risolvere i punti successivi scriviamo il fascio $\mathcal{F}$ di sfere contenenti la circonferenza γ:

$$\mathcal{F}: x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3+\lambda(x+2y-2z+6)=0\qquad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}\,. \tag{5}$$

a) Sfruttando il fascio (5), imponiamo il passaggio per il punto $A(1,1,0)$ sostituendo $x=y=1$ e $z=0$:

$$-3+9\lambda=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{3}\ ;$$

con questo valore otteniamo la sfera

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3+\frac{1}{3}\cdot(x+2y-2z+6)=0\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2-\frac{11}{3}x+\frac{8}{3}y-\frac{8}{3}z-1=0\,.$$

b) Il fascio $\mathcal{F}$ può essere scritto nel modo seguente:

$$x^2+y^2+z^2+(\lambda-4)x+(2\lambda+2)y+(-2\lambda-2)z+6\lambda-3=0 \tag{6}$$

con il metodo del completamento del quadrato possiamo scriverlo così:

$$\left(x+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2-\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)^2+(y+\lambda+1)^2-(\lambda+1)^2+(z-\lambda-1)^2-(-\lambda-1)^2+6\lambda-3=0$$

$$\left(x+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2+(y+\lambda+1)^2+(z-\lambda-1)^2=\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)^2+(\lambda+1)^2+(-\lambda-1)^2-6\lambda+3$$

$$\left(x+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2+(y+\lambda+1)^2+(z-\lambda-1)^2=\frac{9}{4}\lambda^2-4\lambda+9\ ;$$

al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$ il centro della sfera è

$$C_\lambda=\left(\frac{4-\lambda}{2};-\lambda-1;\lambda+1\right) \tag{7}$$

mentre il raggio è

$$R_\lambda=\sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2-4\lambda+9}$$

a questo punto basta uguagliare a 11 l'espressione del raggio:

$$R_\lambda=11\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2-4\lambda+9}=11$$

elevando al quadrato si ha

$$\frac{9}{4}\lambda^2-4\lambda+9=121\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=8\ ;\ \lambda_2=-\frac{56}{9}$$

le due sfere hanno equazioni

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3+8(x+2y-2z+6)=0\quad ;$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3-\frac{56}{9}(x+2y-2z+6)=0$$

svolgendo i calcoli ricaviamo:

$$x^2+y^2+z^2+4x+18y-18z+45=0 \quad ; \quad x^2+y^2+z^2-\frac{92}{9}x-\frac{94}{9}y+\frac{94}{9}z-\frac{121}{3}=0\,.$$

c) Imponiamo che il centro $\left(\frac{4-\lambda}{2}\,;-\lambda-1\,;\lambda+1\right)$ abbia distanza dal piano $x+1=0$ uguale al raggio:

$$\frac{\left|\frac{4-\lambda}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2-4\lambda+9}$$

elevando al quadrato e risolvendo otteniamo i seguenti risultati:

$$\lambda_1=0 \;\; ; \;\; \lambda_2=\frac{1}{2}$$

quindi le due sfere che risolvono il punto c) sono

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3+0\cdot(x+2y-2z+6)=0 \quad ;$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3+\frac{1}{2}\cdot(x+2y-2z+6)=0\,;$$

svolgendo i calcoli si ricavano le equazioni cartesiane delle due sfere:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0 \quad ; \quad x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}x+3y-3z=0\,.$$

d) Primo metodo. Scriviamo le equazioni parametriche della retta r

$$r:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

e le inseriamo nell'equazione della sfera generica scritta nella forma (6), ottenendo così

$$t^2+t^2+(1+t)^2+(\lambda-4)\,t+(2\lambda+2)\,t+(-2\lambda-2)\,(1+t)+6\lambda-3=0$$

$$\Rightarrow \;\; 3t^2+(\lambda-2)\,t+4\lambda-4=0$$

imponiamo ora che le soluzioni siano coincidenti uguagliando il Δ a zero:

$$\Delta=0 \;\;\Rightarrow\;\; (\lambda-2)^2-4\cdot3\cdot(4\lambda-4)=0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda^2-52\lambda+52=0$$

risolvendo troviamo i seguenti valori del parametro λ:

$$\lambda_1=26+4\sqrt{39} \;\; ; \;\; \lambda_2=26-4\sqrt{39}$$

e, sostituiti nel fascio (5), ricaviamo le equazioni delle due sfere con le proprietà richieste:

$$x^2+y^2+z^2+(22+4\sqrt{39})\,x+(54+8\sqrt{39})\,y+(-54-8\sqrt{39})\,z+153+24\sqrt{39}=0\,;$$

$$x^2+y^2+z^2+(22-4\sqrt{39})\,x+(54-8\sqrt{39})\,y+(-54+8\sqrt{39})\,z+153-24\sqrt{39}=0\,.$$

Secondo metodo. Calcoliamo la distanza del centro C_λ dalla retta r e imponiamo che sia uguale al raggio R_λ; scriviamo l'equazione del piano ortogonale a r e passante per C_λ:

$$1\left(x-\frac{4-\lambda}{2}\right)+1\big(y-(-\lambda-1)\big)+1\big(z-(\lambda+1)\big)=0 \;\;\Rightarrow\;\; x+y+z-2+\frac{\lambda}{2}=0$$

intersechiamo ora il piano trovato con la retta r, determinando in questo modo il punto H_λ:

$$\begin{cases} x=y \\ y=z-1 \\ x+y+z-2+\dfrac{\lambda}{2}=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H_\lambda:\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\lambda}{6} \\ y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\lambda}{6} \\ z=\dfrac{4}{3}-\dfrac{\lambda}{6} \end{cases} \;\;;$$

a questo punto uguagliamo la distanza $\overline{H_\lambda C_\lambda}$ al raggio R_λ:

$$\overline{H_\lambda C_\lambda} = R_\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{6} - \frac{4-\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{6} - (-\lambda - 1)\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{\lambda}{6} - (\lambda + 1)\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + 9}\,;$$

elevando al quadrato e semplificando abbiamo:

$$\left(\frac{\lambda}{3} - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{6}\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{6}\lambda\right)^2 = \frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + 9$$

svolgendo i calcoli algebrici arriviamo alla seguente equazione

$$\frac{\lambda^2}{12} - \frac{13}{3}\lambda + \frac{13}{3} = 0$$

e, risolvendola, ritroviamo i valori già visti nell'altro metodo:

$$\lambda_1 = 26 + 4\sqrt{39}\ ;\ \ \lambda_2 = 26 - 4\sqrt{39}\,.$$

e) Primo metodo. Il centro si trova sulla retta s (asse del fascio le cui equazioni sono date dalla formula (4)) e sul piano $\beta : x - 2y - z - 6 = 0$, quindi basta determinare l'intersezione $s \cap \beta$; si arriva all'equazione

$$2 + t - 2(-1 + 2t) - (1 - 2t) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -3\,;$$

il centro della sfera è $C(-1\,;\,-7\,;\,7)$ quindi, per trovare λ, basta uguagliare al centro generico del fascio

$$C_\lambda = \left(\frac{4-\lambda}{2}\,;\,-\lambda - 1\,;\,\lambda + 1\right)$$

(è sufficiente uguagliare una sola coordinata, ad esempio la z):

$$\lambda + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6\,,$$

da cui

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 + 6\cdot(x + 2y - 2z + 6) = 0$$

svolgendo i calcoli si ottiene

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 14y - 14z + 33 = 0\,.$$

Secondo metodo. Possiamo determinare λ semplicemente sostituendo nell'equazione cartesiana di β le coordinate di C_λ:

$$\frac{4-\lambda}{2} - 2\cdot(-\lambda - 1) - (\lambda + 1) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 + \frac{\lambda}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6\,.$$

f) Poiché la circonferenza γ ha raggio $r = \dfrac{\sqrt{65}}{3} \approx 2,69 > 2$, non ci sono sfere con le proprietà richieste. Vediamo di ritrovare questa conclusione con i calcoli algebrici; il centro C_λ ha distanza dal piano $\sigma : x - z = 0$ pari a

$$d = \frac{\left|\frac{4-\lambda}{2} - (\lambda + 1)\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|1 - \frac{3}{2}\lambda\right|}{\sqrt{2}}$$

poiché il raggio della circonferenza intersezione deve essere uguale a 2, deve risultare:

$$2 = \sqrt{(R_\lambda)^2 - d^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = \sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + 9 - \frac{\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)^2}{2}}$$

elevando al quadrato e semplificando abbiamo:

$$4 = \frac{9}{8}\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{17}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{8}\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{9}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{10 \pm 4\sqrt{14}\,i}{9}\,;$$

le radici complesse ci indicano che non ci sono soluzioni, quindi ritroviamo ciò che abbiamo affermato prima.

g) Stavolta, essendo $2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{65}}{3}$, il problema ha soluzione; ripercorrendo ciò che è stato fatto per il punto f), arriviamo alla seguente equazione:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{(R_\lambda)^2 - d^2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + 9 - \frac{\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)^2}{2}}$$

elevando al quadrato e semplificando abbiamo:

$$8 = \frac{9}{8}\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{17}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{8}\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

da cui ricaviamo le due soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{2}{9} \quad ; \quad \lambda_2 = 2$$

sostituendo nell'equazione del fascio (5) otteniamo le equazioni delle due sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 + \frac{2}{9}(x + 2y - 2z + 6) = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 + 2(x + 2y - 2z + 6) = 0$$

svolgendo i calcoli abbiamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{34}{9}x + \frac{22}{9}y - \frac{22}{9}z - \frac{5}{3} = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6z + 9 = 0\,.$$

h) Il raggio minimo è quello di γ, ovvero

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{65}}{3} \approx 2,69\,;$$

possiamo ritrovare questo risultato minimizzando R_λ:

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + 9} = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\left(\lambda - \frac{8}{9}\right)^2 - \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\left(\lambda - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{65}{9}}$$

il minimo si ottiene per $\lambda = \dfrac{8}{9}$ e il valore minimo di R_λ corrispondente è proprio $r = \dfrac{\sqrt{65}}{3}$:

$$R_{\lambda=\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{8}{9} - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{65}{9}} = \sqrt{\frac{65}{9}} = \frac{\sqrt{65}}{3}\,;$$

la sfera di raggio minimo ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 + \frac{8}{9}(x + 2y - 2z + 6) = 0$$

svolgendo i calcoli

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{28}{9}x + \frac{34}{9}y - \frac{34}{9}z + \frac{7}{3} = 0\,.$$

Esistono altri due metodi per ricavare la sfera di raggio minimo:

1. imponendo che il centro C_λ appartenga al piano $\pi : x + 2y - 2z + 6 = 0$:

$$\left(\frac{4-\lambda}{2}\,;\, -\lambda - 1\,;\, \lambda + 1\right) \in \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{4-\lambda}{2} + 2(-\lambda - 1) - 2(\lambda + 1) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4 - \frac{9}{2}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{8}{9}\,.$$

2. imponendo che C_λ coincida con C_γ:

$$\left(\frac{4-\lambda}{2}\,;\, -\lambda - 1\,;\, \lambda + 1\right) = \left(\frac{14}{9}\,;\, -\frac{17}{9}\,;\, \frac{17}{9}\right)$$

basta uguagliare una sola coordinata, ad esempio la z:

$$\lambda + 1 = \frac{17}{9} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{8}{9}\,.$$