Liceo "Carducci" Volterra - Prof. Francesco Daddi

Soluzione dei limiti della verifica del 17/01/2012 - 3^aA Classico

Esercizio 1. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{4\,x^2-5}{6-3\,x} = \frac{11}{0^-} = -\infty$.

Esercizio 2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2-7\,x}{5-4\,x-x^2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$.

Esercizio 3. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{3\,x-x^2-2}{2\,x^2-8\,x+8}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Fattorizzando numeratore e denominatore abbiamo

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)\cdot(x-1)}{2\,(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\cancel{(x-2)}\cdot(x-1)}{2\,(x-2)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-1)}{2\,(x-2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\ .$$

Esercizio 4. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\sqrt{x+4}+1\right)$ si ottiene

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1} = \lim_{x\to -3} \frac{x+4-1}{(x+3)\cdot\left(\sqrt{x+4}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}\cdot\left(\sqrt{x+4}+1\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{\sqrt{x+4}+1} = \frac{1}{2}\ .$$

Esercizio 5. $\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{x^2-2\,x-4}-\sqrt{31}}{x^2+3\,x-10}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}\right)$ si ottiene

$$\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{x^2-2\,x-4}-\sqrt{31}}{x^2+3\,x-10}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}}{\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}} = \lim_{x\to -5} \frac{x^2-2\,x-4-31}{(x^2+3\,x-10)\cdot\left(\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}\right)} =$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2-2\,x-35}{(x^2+3\,x-10)\cdot\left(\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}\right)} = \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-7)}{(x-2)(x+5)\cdot\left(\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}\right)} =$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{\cancel{(x+5)}(x-7)}{(x-2)\cancel{(x+5)}\cdot\left(\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}\right)} = \lim_{x\to -5} \frac{x-7}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2-2\,x-4}+\sqrt{31}\right)} =$$

$$\frac{-12}{-7\cdot(2\sqrt{31})} = \frac{6}{7\sqrt{31}}\ .$$

Esercizio 6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-x^2+3}{x^2-4\,x+2}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$; mettendo in evidenza x^3 al numeratore e x^2 al denominatore si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} x\cdot\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = +\infty\cdot 1 = +\infty\ .$$

Esercizio 7. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9\,x^4+2}}{x^2-6\,x}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$; mettendo in evidenza x^4 dentro il radicale e x^2 al denominatore si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4\cdot\left(9+\dfrac{2}{x^4}\right)}}{x^2\cdot\left(1-\dfrac{6}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\cdot\sqrt{9+\dfrac{2}{x^4}}}{x^2\cdot\left(1-\dfrac{6}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\sqrt{9+\dfrac{2}{x^4}}}{\cancel{x^2}\cdot\left(1-\dfrac{6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3\,.$$

Esercizio 8. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4\,x^2+3\,x-6}-2\,x$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$; moltiplicando per $\dfrac{\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}+2\,x}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}+2\,x}$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}-2\,x\right)\cdot\frac{\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}+2\,x}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}+2\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^2+3\,x-6-4\,x^2}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}+2\,x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x-6}{\sqrt{4\,x^2+3\,x-6}+2\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}\right)}+2\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}}+2\,x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}}+2\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}}+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}}+2} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}\,.$$

Esercizio 9. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+6}-x}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4\,x^2+8\,x+5}}$. Il numeratore tende a $+\infty$, mentre al denominatore si ha la forma indeterminata $+\infty-\infty$. Mettendo in evidenza x^2 nei radicali si ricava

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}-x}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\cdot\left(4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{5}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x}{(-x)\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-(-x)\cdot\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-1\right)}{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\right)} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{5}{x^2}}} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2\,.$$