Liceo “Carducci” Volterra - Prof. Francesco Daddi

Soluzione dei limiti della verifica del 21/01/2012 - 3^aA Classico

Esercizio 1. $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-4}{5-5\,x}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$.

Esercizio 2. $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{1}{8-2\,x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$.

Esercizio 3. $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{18-2\,x^2}{x^2-x-6}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Fattorizzando numeratore e denominatore abbiamo

$$\lim_{x\to3}\frac{-2\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{-2\cdot(x+3)\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\cdot(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{-2\cdot(x+3)}{x+2}=\frac{-2\cdot(3+3)}{3+2}=-\frac{12}{5}\,.$$

Esercizio 4. $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt{2\,x+3}-1}{(x+1)^2}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$; moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)$ si ha

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt{2\,x+3}-1}{(x+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{2\,x+3}+1}{\sqrt{2\,x+3}+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2\,x+3-1}{(x+1)^2\cdot\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2\,x+2}{(x+1)^2\cdot\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2\,\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}\cdot\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{(x+1)}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{(x+1)}\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\left(\sqrt{2\,x+3}+1\right)}=+\infty\cdot\frac{1}{2}=+\infty\,.$$

Esercizio 5. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-4\,x^2+5\,x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$; moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\right)$ si ha

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-4\,x^2+5\,x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^3-4\,x^2+5\,x-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\right)}{x+3-5}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\cdot(x-1)^2\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\right)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-1)^2\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to2}(x-1)^2\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5}\right)=1\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)=2\sqrt{5}\,.$$

Esercizio 6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^4-x^3+3\,x}{24\,x^2+31\,x-2}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$. Mettendo in evidenza x^4 al numeratore e x^2 al denominatore si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\cdot\left(4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(24+\dfrac{31}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{4}\,2}\cdot\left(4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(24+\dfrac{31}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{24+\dfrac{31}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=+\infty\cdot\frac{4}{24}=+\infty\,.$$

Esercizio 7. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2\,x}{\sqrt{3\,x^6-x^2+4}}$. Il limite si presenta nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Mettendo in evidenza x^3 al numeratore e x^6 nel radicale si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^6\cdot\left(3-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{|x^3|\cdot\sqrt{3-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{-x^3\cdot\sqrt{3-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{-\cancel{x^3}\cdot\sqrt{3-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^2}}{-\sqrt{3-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Esercizio 8. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9\,x^2-2\,x+4}+3\,x$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$; moltiplicando per $\dfrac{\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}-3\,x}{\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}-3\,x}$ si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}+3\,x\right)\cdot\frac{\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}-3\,x}{\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}-3\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9\,x^2-2\,x+4-9\,x^2}{\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}-3\,x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2\,x+4}{\sqrt{9\,x^2-2\,x+4}-3\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot\left(-2+\dfrac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(9-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}-3\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot\left(-2+\dfrac{4}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{9-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-3\,x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot\left(-2+\dfrac{4}{x}\right)}{-x\cdot\sqrt{9-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-3\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(-2+\dfrac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{9-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-3\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{9-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-3} =$$

$$\frac{-2}{-3-3} = \frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 9. Calcolare $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4\,x-2}-2\,x}{\sqrt{1-2\,x}-2\,x}$. Il numeratore ed il denominatore tendono entrambi a $+\infty$, quindi il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$. Mettendo in evidenza x^2 nel radicale al numeratore e x^2 nel radicale al denominatore si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4\,x-2}-2\,x}{\sqrt{1-2\,x}-2\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}-2\,x}{\sqrt{x^2\cdot\left(-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}-2\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}-2\,x}{\sqrt{x^2\cdot\left(-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}-2\,x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2\,x}{|x|\cdot\sqrt{-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2\,x}{-x\cdot\sqrt{-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2\right)}{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2\right)} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2}{-\sqrt{-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2} = \frac{-1-2}{-0-2} = \frac{3}{2}\,.$$