Soluzione della verifica di Matematica
3^a A Classico 19/05/2012

Esercizio 1. *Date le funzioni*

$$a)\ \ f(x)=\frac{x^2-5\,x+4}{x^2+4}\qquad,\qquad b)\ \ f(x)=\frac{4-x^2}{x^2+2\,x+1}$$

sceglierne una e studiarla.

Soluzione. a) La funzione $f(x)=\dfrac{x^2-5\,x+4}{x^2+4}$ ha come dominio $\mathbb{R}$, è positiva sugli intervalli $(-\infty,1)$ e $(4,+\infty)$; ha come unico asintoto la retta $y=1$.

La derivata prima è

$$f'(x)=\frac{(2\,x-5)(x^2+4)-(x^2-5\,x+4)2\,x}{(x^2+4)^2}=\frac{5(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

quindi $f(x)$ cresce sugli intervalli $(-\infty,-2)$ e $(2,+\infty)$ e decresce sull'intervallo $(-2,2)$: si ha un massimo per $x=-2$ e minimo per $x=2$.

La derivata seconda è

$$f''(x)=\frac{10\,x(x^2+4)^2-5(x^2-4)2(x^2+4)2\,x}{\left[(x^2+4)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(x^2+4)}\,[10\,x(x^2+4)-20\,x(x^2-4)]}{(x^2+4)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{10\,x(12-x^2)}{(x^2+4)^3}$$

la funzione è convessa sugli intervalli $(-\infty,-\sqrt{12})$ e $(0,\sqrt{12})$ mentre è concava sugli intervalli $(-\sqrt{12},0)$ e $(\sqrt{12},+\infty)$, ci sono tre punti di flesso: $x=-\sqrt{12}$ (flesso discendente), $x=0$ (flesso ascendente), $x=\sqrt{12}$ (flesso discendente).

b) La funzione $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2+2\,x+1}$ ha come dominio $x\neq-1$, è positiva sugli intervalli $(-2,-1)$ e $(-1,2)$. Gli asintoti sono le rette $y=-1$ e $x=-1$.

La derivata prima, osservando che possiamo scrivere $f(x)=\dfrac{4-x^2}{(x+1)^2}$, è

$$f'(x)=\frac{-2\,x(x+1)^2-(4-x^2)2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{\cancel{(x+1)}\,[-2\,x(x+1)-2(4-x^2)]}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-2(x+4)}{(x+1)^3}$$

la funzione cresce sull'intervallo $(-4,-1)$ e decresce sugli intervalli $(-\infty,-4)$ e $(-1,+\infty)$; si ha un minimo in $x=-4$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)^3 + 2\,(x+4)3(x+1)^2}{\left[(x+1)^3\right]^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)^2}\,[-2(x+1)+6(x+4)]}{(x+1)^{\cancel{6}4}} = \frac{4\,x+22}{(x+1)^4}$$

la funzione è convessa sugli intervalli $\left(-\frac{11}{2}\,,\,-1\right)$ e $(-1\,,\,+\infty)$ ed è concava sull'intervallo $\left(-\infty\,,\,-\frac{11}{2}\right)$; $x=-\frac{11}{2}$ è punto di flesso ascendente.

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$$

a) determinare i punti di massimo e minimo relativo;
b) dimostrare che non ci sono flessi.
Soluzione. La derivata prima

$$f'(x) = \frac{(2\,x-1)(x-3)-(x^2-x-2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6\,x+5}{(x-3)^2};$$

la funzione cresce sugli intervalli $(-\infty,1)$ e $(5,+\infty)$, decresce sugli intervalli $(1,3)$ e $(3,5)$. Si ha un massimo in $x=1$ e un minimo in $x=5$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(2\,x-6)(x-3)^2-(x^2-6\,x+5)2\,(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)}\,[(2\,x-6)(x-3)-2(x^2-6\,x+5)]}{(x-3)^{\cancel{4}3}} = \frac{8}{(x-3)^3}$$

la funzione è convessa sull'intervallo $(3,+\infty)$ ed è concava sull'intervallo $(-\infty,3)$. Non ci sono punti di flesso.

Esercizio 3. *Data la funzione*

$$f(x) = \frac{2\,x+6}{x^3}$$

a) determinare il punto di massimo relativo;
b) determinare l'unico punto di flesso;
c) determinare l'equazione cartesiana della retta tangente inflessionale.
Soluzione. a) La derivata è

$$f'(x) = \frac{2\cdot x^3-(2\,x+6)\cdot 3\,x^2}{\left(x^3\right)^2} = \frac{-4\,x^3-18\,x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2(-4\,x-18)}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(-4\,x-18)}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{-4\,x-18}{x^4}$$

la funzione cresce sull'intervallo $\left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$, decresce sugli intervalli $\left(-\dfrac{9}{2}\,,\,0\right)$ e $(0\,,\,+\infty)$; la funzione ha un massimo relativo per $x = -\dfrac{9}{2}$.

b) La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot x^4 - (-4\,x - 18) \cdot 4\,x^3}{(x^4)^2} = \frac{12\,x^4 + 72\,x^3}{x^8} =$$

$$= \frac{12\,x^3(x+6)}{x^8} = \frac{12\,\cancel{x^3}(x+6)}{\cancel{x^8}^{\,5}} = \frac{12\,(x+6)}{x^5}\,;$$

la funzione è convessa sugli intervalli $(-\infty, -6)$ e $(0, +\infty)$, è concava sull'intervallo $(-6, 0)$; la funzione ha un punto di flesso (discendente) in $x = -6$.

c) Sostituendo $x = -6$ nell'espressione di f e della derivata f' si ha

$$f(-6) = \frac{2 \cdot (-6) + 6}{(-6)^3} = \frac{1}{36} \quad ; \quad f'(-6) = \frac{-4 \cdot (-6) - 18}{(-6)^4} = \frac{1}{216}$$

la tangente inflessionale, pertanto, ha equazione cartesiana

$$y = \frac{1}{216}\,(x+6) + \frac{1}{36}\,.$$

Esercizio 4. *Studiare gli eventuali punti di discontinuità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \textit{se } x < 1 \\ 6 & \textit{se } x = 1 \\ -x^2 + 4\,x - 1 & \textit{se } 1 < x \leq 4 \\ x^2 - 10\,x + 26 & \textit{se } x > 4 \end{cases}$$

Soluzione. Poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 - x = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2 + 4\,x - 1 = 2 \quad , \quad f(1) = 6 \neq 2$$

concludiamo che $x = 1$ è un punto di discontinuità di *terza specie.*

Poiché

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} -x^2 + 4\,x - 1 = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} x^2 - 10\,x + 26 = 2$$

possiamo affermare che $x = 4$ è un punto di discontinuità di *prima specie.*

Esercizio 5. *Dopo aver verificato che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \textit{se } x < 2 \\ x^2 - 3\,x + 3 & \textit{se } x \geq 2 \end{cases}$$

è continua nel punto di ascissa $x = 2$, studiare la derivabilità in tale punto.

Soluzione. Poiché

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 5 - x^2 = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 3\,x + 3 = 1 \quad , \quad f(2) = 1$$

la funzione è continua nel punto $x = 2$.

Per la derivabilità calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 2$:

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5 - (2+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2 - 4\,h}{h} = -4$$

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 3\,(2+h) + 3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + h}{h} = 1$$

le due derivate sono finite e distinte, quindi il punto $x = 2$ è un *punto angoloso*.

La tangente da sinistra ha equazione $y = -4\,(x-2) + 1 \;\Rightarrow\; y = -4\,x + 9$.

La tangente da destra ha equazione $y = 1\,(x-2) + 1 \;\Rightarrow\; y = x - 1$.