Liceo Classico “Galilei” Pisa - Classe 2^aA - Prof. Francesco Daddi - 21 ottobre 2011

Svolgimento degli esercizi sulla circonferenza

Esercizio 1. La circonferenza ha centro in $C\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{7}{2}\right) = \left(2, -\frac{7}{2}\right)$ e raggio $= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 2} = \frac{\sqrt{57}}{2}$.

Esercizio 2. Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza di C da P:

$$d(C, P) = \sqrt{(-2-3)^2 + (5-(-7))^2} = 13\,;$$

l'equazione della circonferenza è $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 169$.

Esercizio 3. Il centro C della circonferenza coincide con il punto medio del segmento avente come estremi A e B: si ha $C\left(\frac{4-6}{2}, \frac{0-6}{2}\right) = (-1, -3)$. Il raggio può essere ottenuto in più modi: ad esempio possiamo prendere la semilunghezza del segmento AB oppure la distanza di C da A (o da B). In ogni caso il raggio è uguale a $\sqrt{34}$ e l'equazione della circonferenza è $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 34$.

Esercizio 4. Dal disegno vediamo subito che i centri delle circonferenze sono $C_1(5, -3)$ e $C_2(-5, -3)$, quindi le equazioni cercate sono $\gamma_1 : (x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$ e $\gamma_2 : (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Esercizio 5. Si tratta di intersecare gli assi dei segmenti P_1P_2 e P_1P_3:

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

il raggio della circonferenza è uguale a $d(C, P_1) = \sqrt{5}$, quindi l'equazione cercata è $\gamma : (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Esercizio 6. Il raggio R della circonferenza è uguale alla distanza di C dalla retta assegnata:

$$R = \frac{|3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + 8|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{17}{\sqrt{34}}$$

quindi l'equazione della circonferenza è $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = \frac{17}{2}$. Anche se non richiesto determiniamo il punto T di tangenza intersecando la retta $3x + 5y + 8 = 0$ con la retta passante per C e ad essa perpendicolare:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 8 = 0 \\ y = \frac{5}{3}x + \frac{19}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow T\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 7. La retta passante per A e B ha pendenza $m_{AB} = \frac{4-7}{10-4} = -\frac{1}{2}$ quindi ha equazione esplicita $y = -\frac{1}{2}(x-4) + 7$ ovvero $y = -\frac{1}{2}x + 9$. I punti di intersezione di questa retta con la circonferenza assegnata γ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9\,; \end{cases}$$

si trovano i punti $P(2, 8)$ e $Q(6, 6)$.

La lunghezza della corda avente P e Q come estremi è uguale a $d(P, Q) = \sqrt{20}$.

Esercizio 8. Il centro della circonferenza appartiene all'asse y (avente equazione $x = 0$) e all'asse del segmento di estremi A e B di equazione $y = x - 2$, quindi per ottenere le sue coordinate basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C(0, -2)\,;$$

il raggio R della circonferenza si ottiene determinando la distanza di C da A (o da B): $R = \sqrt{26}$. In definitiva l'equazione della circonferenza è $x^2 + (y+2)^2 = 26$.

Esercizio 9. Il centro della circonferenza γ è $C(3,3)$, la pendenza del segmento CP è uguale a $m_{CP} = \dfrac{6-3}{7-3} = \dfrac{3}{4}$, quindi la retta tangente a γ in P ha pendenza $-\dfrac{4}{3}$. La tangente in P ha pertanto equazione $y = -\dfrac{4}{3}(x-7)+6$ ossia $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{46}{3}$ (equazione implicita $4x+3y-46=0$). Per quanto riguarda il punto Q dal disegno si vede chiaramente che la tangente a γ in Q è parallela all'asse y ed ha quindi equazione $x=-2$.

Esercizio 10. Il centro C della circonferenza appartiene all'asse del segmento di estremi P e T e alla retta n perpendicolare in T alla retta $2x+y-5=0$; per ottenere le sue coordinate basta quindi intersecare queste due rette:

$$\begin{cases} y = -x+8 \\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

il raggio R si trova determinando la distanza di C da T (o da P), ricavando $R=\sqrt{20}$. L'equazione della circonferenza pertanto è $\gamma : (x-7)^2+(y-1)^2 = 20$.

Esercizio 11. Il centro C si trova sulla retta $7x+2y+36=0$ e sulla retta n perpendicolare in T alla retta $4x-5y-2=0$. Intersecando le rette si trova

$$\begin{cases} 7x+2y+36=0 \\ y = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(-6,3)\,;$$

il raggio della circonferenza si trova calcolando $d(C,T)=\sqrt{41}$. La sua equazione, pertanto, è $(x+6)^2+(y-3)^2=41$.

Esercizio 12. La circonferenza assegnata ha centro in $C(4,2)$ e raggio $R=\sqrt{5}$. L'equazione del fascio di rette passanti per $P(9,7)$ è $y=m(x-9)+7$ (equazione implicita $mx-y+7-9m=0$), quindi basta imporre che la distanza di C dalla generica retta del fascio sia uguale ad R:

$$\frac{|m\cdot 4-2+7-9m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|5-5m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |5-5m| = \sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (5-5m)^2 = (m^2+1)\cdot 5 \Rightarrow 10\,(2m^2-5m+2)=0$$

le soluzioni sono $m_1=2\,,\ m_2=\dfrac{1}{2}$; le corrispondenti rette tangenti quindi sono $t_1: y=2x-11$ e $t_2: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$. Per determinare le coordinate del punto A di tangenza tra la retta t_1 e la circonferenza data basta intersecare t_1 con la retta passante per il centro C e perpendicolare a t_1:

$$\begin{cases} y=2x-11 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1\,. \end{cases} \Rightarrow A(6,1)\,.$$

Per il punto B di tangenza tra la retta t_2 e la circonferenza data basta intersecare t_2 con la retta passante per il centro C e perpendicolare a t_2:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \\ y=-2x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4\,. \end{cases} \Rightarrow B(3,4)\,.$$

Il triangolo ABP è isoscele di base AB ed ha quindi area S uguale a

$$S = \frac{1}{2}\cdot d(A,B)\cdot d(P,M)$$

dove M è punto medio del segmento di estremi A e B. Svolgendo i calcoli si scopre che l'area è $S=\dfrac{27}{2}$.

Esercizio 13. La retta $43x-43y+876=0$ ha pendenza (coefficiente angolare) uguale a 1, quindi le rette cercate appartengono al fascio di rette parallele di equazione $y=x+k$. Per determinare quelle tangenti alla circonferenza γ assegnata possiamo seguire due metodi. Primo metodo. Si tratta di imporre che il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y+2=0 \\ y=x+k \end{cases}$$

abbia due soluzioni coincidenti:

$$\begin{cases} x^2+(x+k)^2+6\,x+2\,(x+k)+2=0 \\ y=x+k \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2\,x^2+(8+2\,k)x+k^2+2\,k+2=0 \\ y=x+k \end{cases}$$

il discriminante Δ della prima equazione è $\Delta=-4(k^2-4\,k-12)$, quindi si annulla per $k_1=6$ e $k_2=-2$. In corrispondenza di tali valori si ottengono le rette tangenti $t_1: y=x+6$ e $t_2: y=x-2$.

Secondo metodo. Poiché la circonferenza γ ha centro $C(-3,-1)$ e raggio $R=\sqrt{8}$, imponiamo che la distanza di C dalla retta $y=x+k$ (forma implicita $x-y+k=0$) sia uguale ad R:

$$\frac{|-3-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{8} \;\Rightarrow\; \frac{|k-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8} \;\Rightarrow\; |k-2|=4 \;\Rightarrow\; k-2= \begin{array}{l} \nearrow\; 4 \\ \searrow\; -4 \end{array}$$

le soluzioni sono $k_1=6$ e $k_2=-2$. In corrispondenza di tali valori si ottengono le rette tangenti $t_1: y=x+6$ e $t_2: y=x-2$. I rispettivi punti di tangenza sono $A(-5,1)$ e $B(-1,-3)$.

Esercizio 14. I centri delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani appartengono alle rette $y=x$ e $y=-x$. Poiché $P(8,-1)$ appartiene al quarto quadrante, i centri delle circonfenze che dobbiamo determinare appartengono alla retta $y=-x$. Essendo $C(k,-k)$, basta imporre che la distanza di C dall'asse x (o dall'asse y) sia uguale alla distanza di C da P:

$$d(C\,,\text{ asse } x)=d(C,P) \;\Rightarrow\; |-k|=\sqrt{(k-8)^2+(-k-(-1))^2} \;\Rightarrow\; k^2-18\,k+65=0$$

le soluzioni sono $k_1=13$, $k_2=5$ e le corrispondenti circonferenze sono $\gamma_1:(x-13)^2+(y+13)^2=169$ e $\gamma_2:(x-5)^2+(y+5)^2=25$.

Esercizio 15. Le due rette $x+y=3$ e $x+y=7$ sono parallele ed il luogo dei punti equidistanti da esse si ottiene nel modo seguente:

$$\frac{|x+y-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+y-7|}{\sqrt{1^2+1^2}} \;\Rightarrow\; \frac{|x+y-3|}{\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{|x+y-7|}{\cancel{\sqrt{2}}} \;\Rightarrow\; x+y-3=\pm(x+y-7)$$

se prendiamo il "+" si ottiene l'insieme vuoto, mentre con "-" si ottiene la retta $x+y-5=0$ che è pertanto il luogo cercato. Il centro della circonferenza che dobbiamo determinare appartiene alla retta $2\,x+y=8$ e alla retta $x+y-5=0$, quindi per ottenere le sue coordinate basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\,x+y=8 \\ x+y-5=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \;\Rightarrow\; C(3,2).$$

Il raggio R della circonferenza può essere ottenuto determinando la distanza di $C(3,2)$ da una delle due rette parallele, ad esempio $x+y-3=0$:

$$R=\frac{|3+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,;$$

in alternativa, è possibile determinare il raggio come la semidistanza tra le due rette parallele mediante la formula $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{|-3-(-7)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,.$$

In definitiva la circonferenza ha equazione $(x-3)^2+(y-2)^2=2$.

Esercizio 16. Primo metodo. I centri delle circonferenze che dobbiamo determinare appartengono alla retta n passante per T e perpendicolare alla retta $3\,x-y-6=0$ e alle rette bisettrici degli angoli formati dalle rette $3\,x-y-6=0$ e $x-3\,y-2=0$. La retta n ha equazione $x+3\,y+8=0$ mentre le equazioni delle bisettrici si ottengono nel modo seguente:

$$\frac{|3\,x-y-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|x-3\,y-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} \;\Rightarrow\; \frac{|3\,x-y-6|}{\cancel{\sqrt{10}}}=\frac{|x-3\,y-2|}{\cancel{\sqrt{10}}} \;\Rightarrow\; 3\,x-y-6= \begin{array}{l} \nearrow\; x-3\,y-2 \\ \searrow\; -(x-3\,y-2) \end{array}$$

le equazioni delle due bisettrici, pertanto, sono $b_1 : x + y - 2 = 0$ e $b_2 : x - y - 2 = 0$. La prima circonferenza ha centro C_1 nel punto di intersezione tra la retta n e la bisettrice b_1:

$$\begin{cases} x + 3\,y + 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -5 \end{cases}$$

e raggio R_1 uguale alla distanza di $C_1(7, -5)$ dal punto T; la sua equazione è $(x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 40$.

Procedendo in modo analogo per la seconda circonferenza, si ha che il centro C_2 si ottiene intersecando n con la bisettrice b_2:

$$\begin{cases} x + 3\,y + 8 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

mentre il raggio R_2 si ricava determinando la distanza di $C_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ dal punto T; la sua equazione è $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

Secondo metodo. Visto che i centri devono appartenere alla retta $n : x + 3\,y + 8 = 0$, possiamo esprimere il generico punto di n nella forma $C(-3\,k - 8, k)$ ed imporre che la distanza di C da $T(1, -3)$ sia uguale alla distanza di C dalla retta $x - 3\,y - 2 = 0$:

$$\sqrt{(-3\,k - 8 - 1)^2 + (k + 3)^2} = \frac{|-3\,k - 8 - 3\,k - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \Rightarrow \sqrt{10\,k^2 + 60\,k + 90} = \frac{|-6\,k - 10|}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\,k^2 + 60\,k + 90 = \frac{(-6\,k - 10)^2}{10} \Rightarrow 32\,(2\,k^2 + 15\,k + 25) = 0$$

le soluzioni sono $k_1 = -\frac{5}{2}$ e $k_2 = -5$; le corrispondenti equazioni sono $\gamma_1 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ e $\gamma_2 : (x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 40$.

Esercizio 17. Primo metodo. Determiniamo le rette bisettrici degli angoli formati dalle rette $2\,x - 3\,y + 3 = 0$ e $3\,x - 2\,y - 3 = 0$:

$$\frac{|2\,x - 3\,y + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|3\,x - 2\,y - 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \Rightarrow \frac{|2\,x - 3\,y + 3|}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{|3\,x - 2\,y - 3|}{\cancel{\sqrt{13}}} \Rightarrow 2\,x - 3\,y + 3 = \begin{matrix} \nearrow & 3\,x - 2\,y - 3 \\ \searrow & -(3\,x - 2\,y - 3) \end{matrix}$$

le equazioni delle bisettrici pertanto sono $b_1 : x + y - 6 = 0$ e $b_2 : x - y = 0$. Il centro C_1 della prima circonferenza che dobbiamo determinare si ottiene intersecando b_1 con la retta $x - 2\,y - 3 = 0$:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 2\,y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1(5, 1);$$

il raggio R_1 si ottiene determinando la distanza di C_1 dalla retta $2\,x - 3\,y + 3 = 0$:

$$R_1 = \frac{|2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}};$$

in definitiva l'equazione della prima circonferenza è $\gamma_1 : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = \frac{100}{13}$.

Si procede in modo del tutto analogo per la seconda circonferenza: le coordinate del suo centro C_2 si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2\,y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow C_2(-3, -3);$$

il raggio R_2 si ottiene determinando la distanza di C_2 dalla retta $2\,x - 3\,y + 3 = 0$:

$$R_2 = \frac{|2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}};$$

in definitiva l'equazione della seconda circonferenza è $\gamma_2 : (x+3)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{36}{13}$.

Secondo metodo. Poiché i centri delle circonferenze da determinare appartengono alla retta $x - 2\,y - 3 = 0$, possiamo scrivere il generico punto di tale retta nella forma $C(2\,k+3\,,\,k)$ ed imporre che la distanza di C dalla retta $2\,x - 3\,y + 3 = 0$ sia uguale alla distanza di C dalla retta $3\,x - 2\,y - 3 = 0$:

$$\frac{|2(2\,k+3) - 3\,k + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|3(2\,k+3) - 2\,k - 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{|k+9|}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{|4\,k+6|}{\cancel{\sqrt{13}}} \quad \Rightarrow \quad k+9 = \begin{array}{l} \nearrow \quad 4\,k+6 \\ \\ \searrow \quad -(4\,k+6) \end{array}$$

le soluzioni sono $k_1 = 1$ e $k_2 = -3$. Le corrispondenti circonferenze sono $\gamma_1 : (x-5)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{100}{13}$ e $\gamma_2 : (x+3)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{36}{13}$.

Esercizio 18. I centri delle circonferenze che dobbiamo determinare appartengono alla retta $n : y = -x-6$ passante per $T(-2, -4)$ e perpendicolare alla retta $x - y - 2 = 0$. A questo punto abbiamo due metodi. Primo metodo. Il punto generico della retta n può essere espresso nella forma $C(k, -k-6)$. A questo punto, per determinare i centri delle circonferenze basta imporre che C abbia distanza $\sqrt{18}$ dal punto $T(-2, -4)$:

$$\sqrt{(k+2)^2 + (-k-6+4)^2} = \sqrt{18} \quad \Rightarrow \quad (k+2)^2 + (-k-2)^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad 2\,k^2 + 8\,k - 10 = 0$$

le soluzioni sono $k_1 = 1$ e $k_2 = -5$ e le corrispondenti circonferenze sono $\gamma_1 : (x-1)^2 + (y+7)^2 = 18$ e $\gamma_2 : (x+5)^2 + (y+1)^2 = 18$.

Secondo metodo. Si osserva che i centri hanno distanza $\sqrt{18}$ dal punto T, quindi appartengono alla circonferenza ψ di centro T e raggio $\sqrt{18}$. I centri che dobbiamo determinare si trovano quindi intersecando la circonferenza $\psi : (x+2)^2 + (y+4)^2 = 18$ con la retta $n : y = -x-6$:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+4)^2 = 18 \\ y = -x-6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x+2)^2 + (-x-6+4)^2 = 18 \\ y = -x-6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\,x^2 + 8\,x - 10 = 0 \\ y = -x-6\,; \end{cases}$$

i centri sono $C_1(1\,,\,-7)$ e $C_2(-5\,,\,-1)$ e le corrispondenti circonferenze sono $\gamma_1 : (x-1)^2 + (y+7)^2 = 18$ e $\gamma_2 : (x+5)^2 + (y+1)^2 = 18$.

Esercizio 19. I centri delle circonferenze che dobbiamo determinare appartengono all'asse del segmento di estremi A e B, di equazione $y = -x+4$. A questo punto abbiamo due metodi.

Primo metodo. Il generico punto dell'asse può essere espresso nella forma $C(k\,,\,-k+4)$; imponendo che C abbia distanza $\sqrt{10}$ dal punto B (o dal punto A) si ha

$$\sqrt{(k-0)^2 + (-k+4-2)^2} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\,k^2 - 4\,k + 4} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad 2\,k^2 - 4\,k - 6 = 0$$

le soluzioni sono $k_1 = 3$, $k_2 = -1$ e le corrispondenti circonferenze sono $\gamma_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ e $\gamma_2 : (x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$.

Secondo metodo. I centri devono avere distanza $\sqrt{10}$ da A, quindi si trovano sulla circonferenza $\sigma : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$ avente centro A e raggio $\sqrt{10}$; per ottenere le coordinate dei centri basta allora intersecare σ con l'asse del segmento di estremi A e B (di equazione $y = -x+4$):

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10 \\ y = -x+4 \end{cases}$$

trovando così i centri $C_1(3, 1)$ e $C_2(-1, 5)$; le corrispondenti circonferenze sono $\gamma_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ e $\gamma_2 : (x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$.

Esercizio 20. I centri delle circonferenze che dobbiamo determinare appartengono all'asse del segmento di estremi A e B, di equazione $y = -x+10$. Il generico punto dell'asse può essere espresso nella forma $C(k\,,\,-k+10)$; imponiamo ora che la distanza di C dal punto A (o dal punto B) sia uguale alla distanza di C dalla retta $t : y = 6 - 3\,x$ (forma implicita $t : 3\,x + y - 6 = 0$):

$$\sqrt{(k-2)^2 + (-k+10-4)^2} = \frac{|3 \cdot k + (-k+10) - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2\,k^2-16\,k+40}=\frac{|2\,k+4|}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad 16(k^2-11\,k+24)=0$$

le due soluzioni sono $k_1 = 3$ e $k_2 = 8$; le corrispondenti equazioni sono $\gamma_1 : (x-3)^2+(y-7)^2 = 10$ e $\gamma_2 : (x-8)^2+(y-2)^2 = 40$.

Per determinare l'equazione dell'altra retta tangente ad entrambe le circonferenze γ_1 e γ_2 è sufficiente ragionare nel modo seguente: la retta deve passare per il punto P di intersezione tra l'asse del segmento AB (di equazione $y=-x+10$) e la retta $t : y = 6-3\,x$:

$$\begin{cases} y=-x+10 \\ y=6-3\,x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P(-2,12)\,.$$

A questo punto si aprono due strade: possiamo determinare le rette passanti per P e tangenti a una delle due circonferenze (ad esempio γ_1) trovando, oltre alla retta data $t : y = 6-3\,x$, anche la retta cercata. L'equazione del fascio di rette passanti per P è $y = m(x+2)+12$ (di equazione implicita $m\,x-y+2\,m+12 = 0$), il centro $C_1(3,7)$ deve avere distanza $\sqrt{10}$ dalla generica retta del fascio

$$\frac{|m\cdot 3-7+2\,m+12|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{|5\,m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{(5\,m+5)^2}{m^2+1}=10 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (5\,m+5)^2=10(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad 15\,m^2+50\,m+15=0$$

le due soluzioni sono $m_1 = -3$ e $m_2 = -\dfrac{1}{3}$; con la prima soluzione si ritrova la retta t mentre con la seconda soluzione si ricava la retta cercata, di equazione esplicita $y = -\dfrac{1}{3}(x+2)+12$ che possiamo riscrivere in forma implicita $x+3\,y-34 = 0$.

In alternativa possiamo scegliere un punto qualsiasi di t (purché distinto da P), ad esempio $Q(1,3)$, determinare il suo simmetrico $Q'(7,9)$ rispetto alla retta $y = -x+10$ (asse del segmento di estremi A e B) e scrivere infine l'equazione della retta che passa per $P(-2,12)$ e $Q'(7,9)$: si trova la retta di equazione $x+3\,y-34 = 0$.