Appunti sulla circonferenza

In queste pagine sono trattati gli argomenti riguardanti la circonferenza nel piano cartesiano svolti durante le lezioni. Ho cercato di fare molti esempi per agevolare lo studio e la comprensione dei concetti chiave e dei procedimenti che devono essere seguiti dallo studente.

Equazione della circonferenza dato il centro e il raggio

Se vogliamo trovare l'equazione cartesiana di una circonferenza di cui conosciamo il centro $C(x_C\,;\,y_C)$ e il raggio R basta imporre la condizione:

$$\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}=R \tag{1}$$

elevando al quadrato otteniamo:

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2\,. \tag{2}$$

Esempio 1. *Determinare l'equazione della circonferenza di centro* $C=\left(-3\,;\,\frac{5}{2}\right)$ *e raggio* $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluzione. L'equazione della circonferenza è

$$(x+3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

sviluppando i quadrati dei binomi si ottiene:

$$x^2+9+6\,x+y^2+\frac{25}{4}-5\,y-\frac{3}{4}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+6\,x-5\,y+\frac{29}{2}=0\,.$$

Esempio 2. *Determinare l'equazione della circonferenza di centro* $C=(4\,;\,-3)$ *e passante per* $A(1\,;\,-7)$.

Soluzione. Il raggio della circonferenza è $R=\overline{AC}=\sqrt{(1-4)^2+(-7+3)^2}=5$; l'equazione della circonferenza è

$$(x-4)^2+(y+3)^2=5^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-8\,x+6\,y=0\,.$$

Esempio 3. *Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza avente per diametro il segmento* AB *dove* $A(2\,;\,-1)$ *e* $B(4\,;\,3)$.

Soluzione. Il centro della circonferenza è il punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$C\left(\frac{2+4}{2}\,;\,\frac{-1+3}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad C\,(3\,;\,1)\ ;$$

per ottenere il raggio R basta calcolare la lunghezza del segmento $\overline{AC}$:

$$R=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\ ;$$

l'equazione della circonferenza è $(x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-6\,x-2\,y+5=0\,.$

Centro e raggio della circonferenza passante per tre punti

Esercizio 4. *Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti* $A(4\,;\,1)$, $B(2\,;\,-1)$, $C(-2\,;\,-2)$.

Soluzione. Determiniamo l'equazione dell'asse del segmento AB:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y+1)^2 \quad\Rightarrow\quad -4\,x-4\,y+12=0 \quad\Rightarrow\quad y=-x+3\,;$$

determiniamo ora l'equazione dell'asse del segmento BC:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y+2)^2 \quad\Rightarrow\quad -8\,x-2\,y-3=0 \quad\Rightarrow\quad y=-4\,x-\frac{3}{2}\,.$$

A questo punto dobbiamo calcolare le coordinate del punto E, intersezione delle due rette appena individuate:

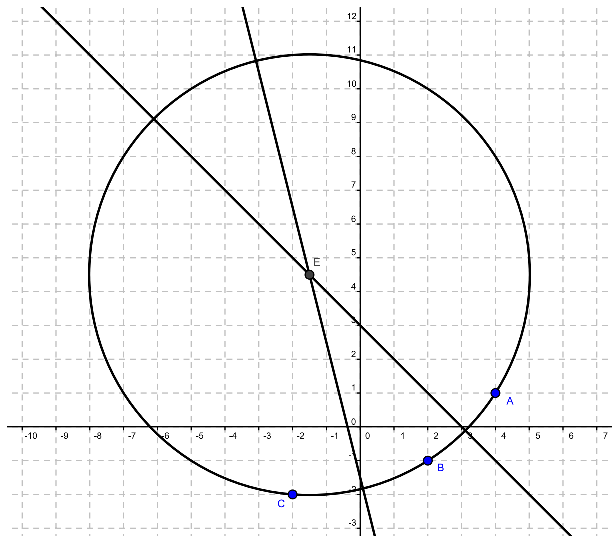
$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=-4\,x-\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad E\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right)\,.$$

Il punto E è il centro della circonferenza passante per i tre punti A, B, C; per calcolare il raggio di questa circonferenza basta determinare la lunghezza del segmento AE:

$$\overline{AE} = \sqrt{\left(4+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{85}{2}} \approx 6,52 \;;$$

l'equazione cartesiana della circonferenza è

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{85}{2}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+3\,x-9\,y-20=0\;.$$



Centro e raggio a partire dall'equazione della circonferenza

Data l'equazione cartesiana della circonferenza

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \tag{3}$$

la prima cosa da fare è calcolare la quantità $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma$; si possono verificare tre casi:

1. se $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma>0$ si ha una ***circonferenza reale*** ;
2. se $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma=0$ si ha una ***circonferenza degenere in un punto*** ;
3. se $\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma<0$ si ha una ***circonferenza immaginaria*** .

Se siamo nel primo caso allora possiamo determinare il raggio R della circonferenza

$$R=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma} \tag{4}$$

e le coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{\alpha}{2}\,;\,-\frac{\beta}{2}\right)\;. \tag{5}$$

Se siamo nel secondo caso, invece, la formula (5) fornisce l'**unico** punto le cui cooordinate soddisfano l'equazione (3).

Esempio 5. *Determinare il centro ed il raggio della circonferenza*

$$x^2+y^2+8\,x-12\,y-5=0\;.$$

Soluzione. Dalle formule precedenti abbiamo:

$$\frac{8^2}{4}+\frac{(-12)^2}{4}-(-5)=\frac{64}{4}+\frac{144}{4}+5=57>0 \quad\Rightarrow\quad \text{circonferenza reale} \quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{57}\approx 7,55\;;$$

$$\text{il centro della circonferenza è il punto } C\left(-\frac{8}{2}\,;\,-\frac{-12}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad C(-4;6)\;.$$

Esempio 6. *Determinare il centro ed il raggio della circonferenza*

$$x^2 + y^2 + 4\,x - 10\,y + 29 = 0\ .$$

Soluzione. Dalle formule precedenti abbiamo:

$$\frac{4^2}{4} + \frac{(-10)^2}{4} - 29 = 4 + 25 - 29 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{circonferenza degenere}$$

l'equazione rappresenta **solo** il punto $C\left(-\frac{4}{2}\,;\,-\frac{-10}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C(-2\,;\,5)$.

Esempio 7. *Determinare il centro ed il raggio della circonferenza*

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 2\,y + 3 = 0\ .$$

Soluzione. Dalle formule precedenti abbiamo:

$$\frac{2^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} - 3 = 1 + 1 - 3 = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{circonferenza immaginaria.}$$

Esercizio 8. *Data la circonferenza* $x^2+y^2+6\,x-2\,y+1 = 0$*, stabilire se il punto* $P(-5\,;\,-1)$ *appartiene alla circonferenza; in caso di risposta negativa si dica se* P *è interno o esterno alla circonferenza.*

Soluzione. Calcoliamo il raggio e il centro della circonferenza:

$$R = 3 \quad ; \quad C\,(-3\,;\,1)\ ;$$

a questo punto calcoliamo la distanza $\overline{CP}$:

$$\overline{CP} = \sqrt{(-3+5)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} \approx 2,83 < 3 \quad \Rightarrow \quad P \text{ è interno}\ .$$

Posizione reciproca tra retta e circonferenza

Assegnate la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 + \alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$ e la retta di equazione: $a\,x + b\,y + c = 0$ vogliamo stabilire la loro posizione reciproca. Indichiamo con d la distanza del centro della circonferenza dalla retta; la distanza d del centro del cerchio $C = (x_C\,;\,y_C)$ dalla retta è data dalla formula:

$$d = \frac{|a\,x_C + b\,y_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ; \tag{6}$$

si possono verificare tre casi:

1. se $d > R \quad \Rightarrow$ la retta è **esterna** alla circonferenza;
2. se $d = R \quad \Rightarrow$ la retta è **tangente** alla circonferenza;
3. se $d < R \quad \Rightarrow$ la retta è **secante** la circonferenza.

Osservazione. Se $d = 0$ la retta passa per il centro della circonferenza: i due punti di intersezione sono, ovviamente, gli estremi di un diametro.
E' consigliabile, in ogni caso, fare il disegno nel piano cartesiano per avere la conferma di ciò che troviamo algebricamente.

Esempio 9. *Determinare la posizione reciproca tra la circonferenza* $x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y - 10 = 0$ *e la retta* $y = 3\,x - 7$*.*
Soluzione. Il raggio della circonferenza è

$$R = \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{(-10)^2}{4} - (-10)} = \sqrt{36} = 6$$

prima di calcolare la distanza del centro $C(-1\,;\,5)$ dalla retta, conviene scrivere quest'ultima nella forma $3\,x - y - 7 = 0$; la distanza d del centro C dalla retta è pari a

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) - 5 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} \approx 4,74$$

poiché risulta $d < R$, la retta è secante la circonferenza (e ci sono due punti di intersezione).

Esempio 10. *Determinare la posizione reciproca tra la circonferenza* $x^2+y^2-2\,x+8\,y+1=0$ *e la retta* $y=-5\,x+30$.
<u>Soluzione.</u> Il raggio della circonferenza è

$$R=\sqrt{\frac{(-2)^2}{4}+\frac{8^2}{4}-1}=\sqrt{16}=4$$

prima di calcolare la distanza del centro $C(1\,;\,-4)$ dalla retta, conviene scrivere quest'ultima nella forma $5\,x+y-30=0$; la distanza d del centro C dalla retta è pari a:

$$d=\frac{|5\cdot 1+(-4)-30|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{29}{\sqrt{26}}\approx 5,69$$

la retta è esterna alla circonferenza in quanto risulta $d>R$.

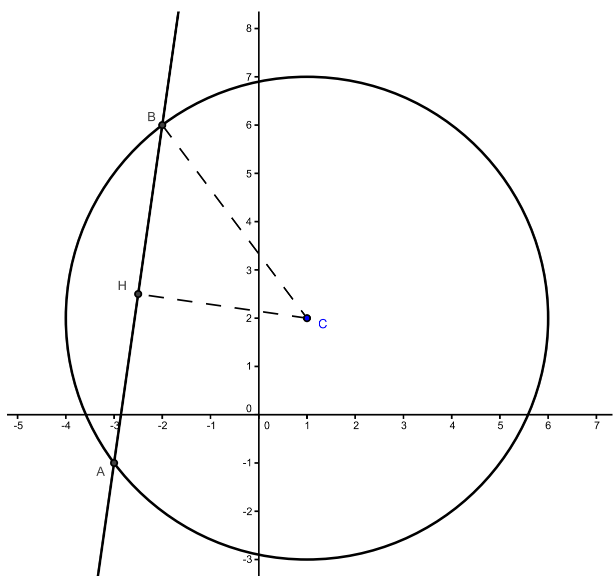
Esempio 11. *Determinare la posizione reciproca tra la retta* $y=9-x$ *e la circonferenza* $x^2+y^2-4\,x-6\,y+5=0$.
<u>Soluzione.</u> La circonferenza ha centro in $C(2\,;\,3)$ e raggio $R=2\sqrt{2}$; la distanza tra C e la retta è $d(C,r)=2\sqrt{2}$, quindi la retta è tangente alla circonferenza. Se vogliamo determinare il punto T di tangenza è sufficiente determinare la proiezione ortogonale di C sulla retta $y=9-x$: svolgendo i calcoli troviamo $T(4\,;\,5)$.

Esempio 12. *Indichiamo con* A *e* B *i punti di intersezione della circonferenza* $x^2+y^2-2\,x-4\,y-20=0$ *con la retta* $y=7\,x+20$. *Determinare la lunghezza del segmento* AB.
<u>Soluzione.</u> La circonferenza ha centro in $C(1\,;\,2)$ e raggio $R=5$; la distanza del centro $C(1\,;\,2)$ dalla retta è

$$d(C,r)=\frac{|7\cdot 1-2+20|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\frac{25}{\sqrt{50}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\approx 3,54\,;$$

indicando con H la proiezione di C sulla retta $y=7\,x+20$, la lunghezza del segmento AB è

$$\overline{AB}=2\cdot\overline{BH}=2\cdot\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{CH}^2}=2\cdot\sqrt{R^2-[d(C,r)]^2}=2\cdot\sqrt{5^2-\left[\frac{25}{\sqrt{50}}\right]^2}=2\cdot\sqrt{25-\frac{25}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{25}{2}}=5\sqrt{2}\,.$$



Punti di intersezione tra retta e circonferenza

Se vogliamo trovare i punti di intersezione retta-circonferenza dobbiamo risolvere il sistema algebrico formato dalle equazioni della circonferenza e della retta.

Esempio 13. *Trovare i punti di intersezione tra la retta* $y=2\,x-6$ *e la circonferenza* $x^2+y^2-2\,x+10\,y+16=0$.
Soluzione. Si tratta di risolvere il sistema seguente

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\,x+10\,y+16=0 \\ y=2\,x-6 \end{cases}\quad;$$

sostituendo la y nell'equazione della circonferenza si ottiene:

$$x^2+(2\,x-6)^2-2x+10(2x-6)+16=0$$

da cui

$$x^2 + 4x^2 + 36 - 24x - 2x + 20x - 60 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 6x - 8 = 0$$

risolvendo l'ultima equazione di secondo grado ricaviamo:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8)}}{2 \cdot 5} =$$

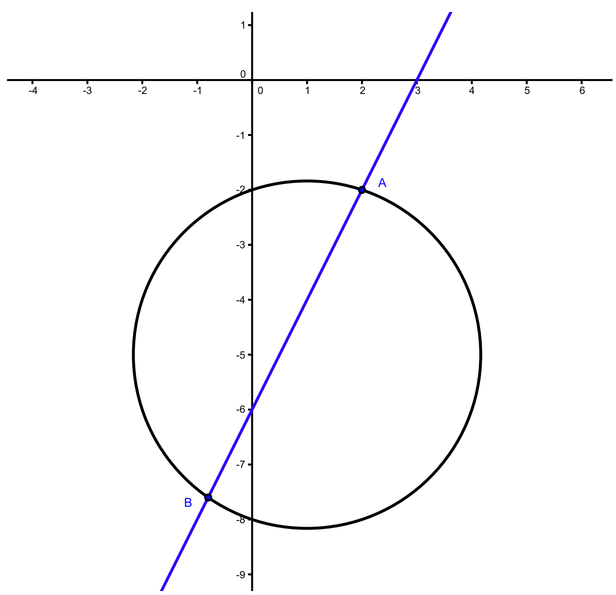
$$= \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{6+14}{10} = \dfrac{20}{10} = 2 \\ \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{6-14}{10} = \dfrac{-8}{10} = -\dfrac{4}{5} \end{array}$$

a questo punto basta sostituire i due valori trovati per la x nell'equazione della retta:

$$y = 2\,x - 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \nearrow \quad y_1 = 2 \cdot (2) - 6 = 4 - 6 = -2 \\ \\ \searrow \quad y_2 = 2 \cdot \left(-\dfrac{4}{5}\right) - 6 = -\dfrac{8}{5} - 6 = \dfrac{-8-30}{5} = -\dfrac{38}{5} \end{array}$$

in definitiva i due punti di intersezione sono:

$$A = (x_1\,;\,y_1) = (2\,;\,-2) \quad ; \quad B = (x_2\,;\,y_2) = \left(-\frac{4}{5}\,;\,-\frac{38}{5}\right).$$



Esempio 14. *Trovare i punti di intersezione tra la retta* $y = x + 7$ *e la circonferenza* $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Soluzione. Si tratta di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y = x + 7 \end{cases}$$

sostituendo la y nell'equazione della circonferenza si ottiene: $x^2 + (x+7)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 49 + 14\,x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,x^2 + 14\,x + 45 = 0$ poiché il Δ dell'ultima equazione scritta è negativo (risulta $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 45 = 196 - 360 = -164$) non ci sono punti di intersezione tra la retta e la circonferenza. Tutto questo poteva essere previsto calcolando il centro, il raggio del cerchio e la distanza d del centro dalla retta in questione. Si ha infatti:

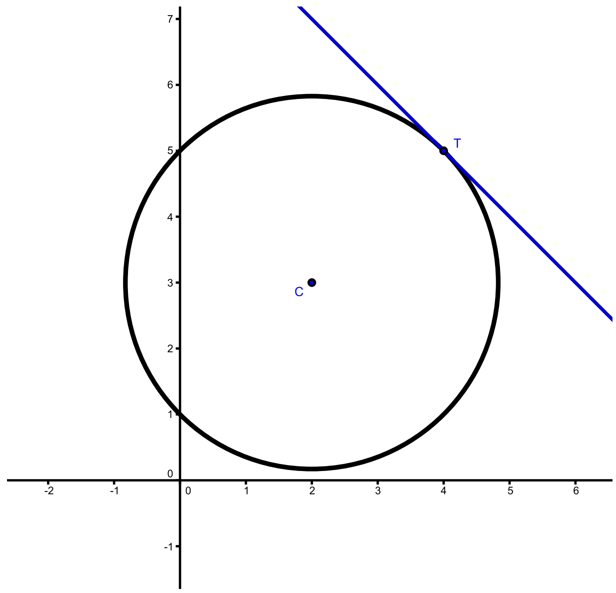
$$C = (0;0) \;\; ; \;\; R = 2 \;\; ; \;\; d = \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4,95 \quad \Rightarrow \quad d > R\,.$$

Esempio 15. *Trovare i punti di intersezione tra la retta $y = 9 - x$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 4\,x - 6\,y + 5 = 0$.*

Soluzione. Si tratta dello stesso problema che abbiamo affrontato nell'esempio 11: mettendo a sistema la retta e la circonferenza troviamo

$$\begin{cases} y = 9 - x \\ x^2 + y^2 - 4\,x - 6\,y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 - x \\ x^2 + (9-x)^2 - 4\,x - 6\,(9-x) + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9 - x \\ 2\,x^2 - 16\,x + 32 = 0 \end{cases}$$

la seconda equazione ammette due soluzioni coincidenti (risulta $\Delta = 0$ da cui $x_1 = x_2 = 4$), quindi la retta è tangente alla circonferenza e il punto di tangenza è $T(4\,;\,5)$ (si veda la figura).



Posizione reciproca tra due circonferenze

Indichiamo con d_{centri} la distanza tra i due centri e con R_1 e R_2 i due raggi. Ci sono 6 casi:

1. se $d_{\text{centri}} > R_1 + R_2$ le circonferenze sono ***esterne*** ;
2. se $d_{\text{centri}} = R_1 + R_2$ le circonferenze sono ***tangenti esternamente*** ;
3. se $|R_1 - R_2| < d_{\text{centri}} < R_1 + R_2$ le circonferenze sono ***secanti*** ;
4. se $d_{\text{centri}} = |R_1 - R_2|$ le circonferenze sono ***tangenti internamente*** ;
5. se $0 < d_{\text{centri}} < |R_1 - R_2|$ ***una circonferenza è interna all'altra*** ;
6. se $d_{\text{centri}} = 0$ (ovvero se $C_1 = C_2$) le due circonferenze sono ***concentriche***.

Osservazione. Se i raggi sono uguali ($R_1 = R_2$) allora gli ultimi tre casi si riassumono in un unico caso: ***le due circonferenze coincidono.***

E' consigliabile, in ogni caso, fare il disegno nel piano cartesiano per avere la conferma di ciò che troviamo algebricamente.

Esempio 16. *Stabilire la posizione reciproca delle seguenti circonferenze:*

$$x^2 + y^2 + 4\,x - 2\,y - 20 = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 - 10\,x - 8\,y + 5 = 0\,.$$

<u>Soluzione.</u> I centri sono:

$$C_1 = (-2\,;\,1) \quad ; \quad C_2 = (5\,;\,4) \quad \Rightarrow \quad d_{\text{centri}} = \sqrt{(5+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{58} \approx 7,62$$

mentre i raggi sono:

$$R_1 = \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} - (-20)} = \sqrt{25} = 5 \quad ; \quad R_2 = \sqrt{\frac{(-10)^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} - 5} = \sqrt{36} = 6\,.$$

Poiché

$$d_{\text{centri}} \approx 7,62 > |R_1 - R_2| = R_2 - R_1 = 6 - 5 = 1$$
$$d_{\text{centri}} \approx 7,62 < R_1 + R_2 = 11$$

siamo nel caso 3, ovvero le circonferenze sono secanti (ed hanno quindi due punti in comune).

Esempio 17. *Stabilire la posizione reciproca delle seguenti circonferenze:*

$$x^2+y^2-16\,x+10\,y-136=0 \quad ; \quad x^2+y^2-4\,x-6\,y-12=0$$

<u>**Soluzione.**</u> I centri sono:

$$C_1=(8\,;-5) \quad ; \quad C_2=(2\,;3) \quad \Rightarrow \quad d_{\text{centri}}=\sqrt{(2-8)^2+(3+5)^2}=\sqrt{100}=10$$

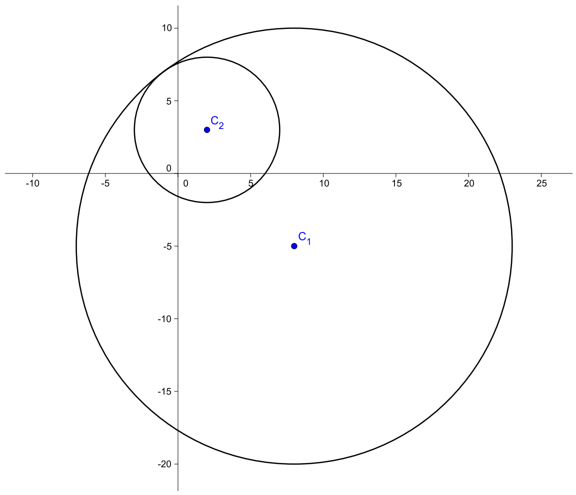
mentre i raggi sono:

$$R_1=\sqrt{\frac{(-16)^2}{4}+\frac{10^2}{4}-(-136)}=\sqrt{225}=15 \quad ; \quad R_2=\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^2}{4}-(-12)}=\sqrt{25}=5\,.$$

Poiché

$$d_{\text{centri}}=10=|R_1-R_2|$$

siamo nel caso 4, ovvero le circonferenze sono tangenti internamente (si veda la figura).



Punti di intersezione tra due circonferenze

Per determinare gli eventuali punti di intersezione di due circonferenze

$$\mathcal{C}_1: x^2+y^2+\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \;\; ; \;\; \mathcal{C}_2: x^2+y^2+\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$$

basta risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2+y^2+\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \\ x^2+y^2+\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0 \end{cases}$$

sottraendo le due equazioni otteniamo l'equazione dell'**asse radicale delle due circonferenze**:

$$\textbf{asse radicale di } \mathcal{C}_1 \textbf{ e } \mathcal{C}_2 \textbf{ :} \;\; (\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y+\gamma_1-\gamma_2=0$$

a questo punto basta intersecare l'asse radicale con una qualsiasi delle due circonferenze (ad esempio con $\mathcal{C}_1$), ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} (\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y+\gamma_1-\gamma_2=0 \\ x^2+y^2+\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \end{cases}$$

Esempio 18. *Determinare gli eventuali punti di intersezione delle circonferenze* $\mathcal{C}_1: x^2+y^2-6\,x-8\,y+20=0$ *e* $\mathcal{C}_2: x^2+y^2+6\,x-12\,y+20=0$.
<u>**Soluzione.**</u> Mettendo a sistema le due circonferenze abbiamo:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6\,x-8\,y+20=0 \\ x^2+y^2+6\,x-12\,y+20=0 \end{cases}$$

l'equazione dell'asse radicale è $-12\,x+4\,y=0$ (semplificando si ricava $3\,x-y=0$) per cui possiamo studiare il sistema

$$\begin{cases} 3\,x-y=0 \\ x^2+y^2-6\,x-8\,y+20=0 \end{cases}$$

ricavando la y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ha:

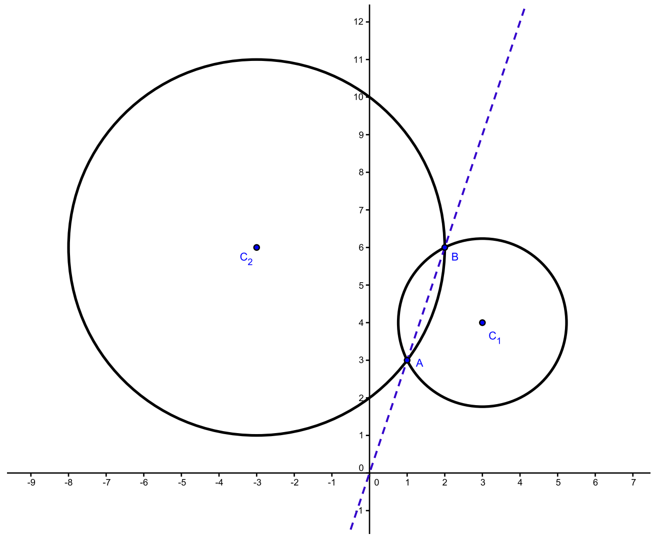
$$\begin{cases} y = 3\,x \\ x^2 + y^2 - 6\,x - 8\,y + 20 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 3\,x \\ x^2 + (3\,x)^2 - 6\,x - 8\,(3\,x) + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3\,x \\ 10\,x^2 - 30\,x + 20 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{dalla seconda equazione abbiamo } x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2$$

le coordinate y si ricavano sostituendo nell'equazione dell'asse radicale i valori trovati per x:

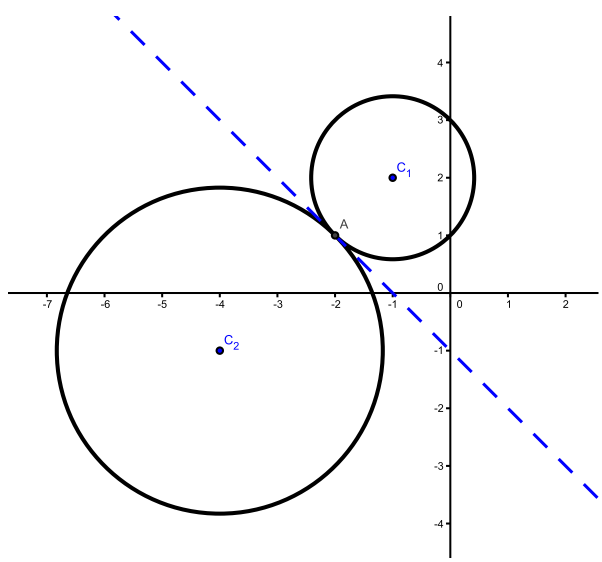
$$y_1 = 3 \cdot 1 = 3 \;\; ; \;\; y_2 = 3 \cdot 2 = 6 \;;$$

in definitiva i punti di intersezione sono $A(1\,;\,3)$ e $B(2\,;\,6)$ (si veda la figura).



Esempio 19. *Determinare gli eventuali punti di intersezione delle circonferenze* $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 2\,x - 6\,y = 0$ *e* $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 6\,x + 8\,y + 10 = 0$.
Soluzione. L'asse radicale è $8\,x - 14\,y - 10 = 0$ (semplificando $4\,x - 7\,y - 5 = 0$); intersecando l'asse radicale con la prima circonferenza non si ottengono soluzioni reali $\Rightarrow$ l'asse radicale è esterno rispetto ad entrambe le circonferenze $\Rightarrow$ le due circonferenze non hanno punti in comune. Svolgendo i calcoli indicati nello schema del paragrafo "*Posizione reciproca tra due circonferenze*" si trova che le due circonferenze sono esterne.

Esempio 20. *Determinare gli eventuali punti di intersezione delle circonferenze* $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 2\,x - 4\,y + 3 = 0$ *e* $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 8\,x + 2\,y + 9 = 0$.
Soluzione. L'asse radicale è $-6\,x - 6\,y - 6 = 0$ (semplificando $x + y + 1 = 0$); intersecando l'asse radicale con la prima circonferenza otteniamo un solo punto in comune (sono due punti coincidenti): $A(-2\,;\,1)$. L'asse radicale è tangente ad entrambe le circonferenze $\Rightarrow$ le due circonferenze sono tangenti. Svolgendo i calcoli indicati nello schema del paragrafo "*Posizione reciproca tra due circonferenze*" si trova che le due circonferenze sono tangenti esternamente (si veda la figura).



Circonferenza con centro dato e tangente ad una retta

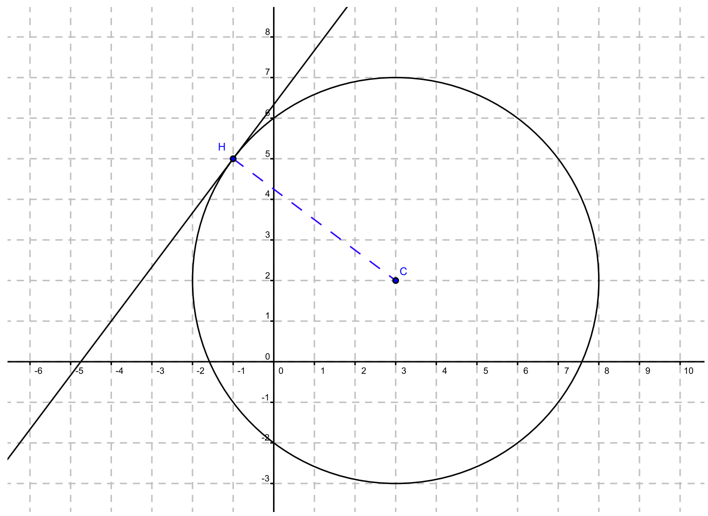
Esempio 21. *Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza di centro $C(3\,;\,2)$ e tangente alla retta di equazione $r:\ 4\,x-3\,y+19=0$.*

Soluzione. Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza del punto C dalla retta r:

$$R=d(C,r)=\frac{|4\cdot 3-3\cdot 2+19|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|12-6+19|}{\sqrt{16+9}}=\frac{25}{5}=5\ ;$$

l'equazione cartesiana della circonferenza, pertanto, risulta essere la seguente:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-6\,x-4\,y-12=0\ \text{ (si veda la figura).}$$



Esempio 22. *Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza avente centro in $C(-2\,;\,6)$ e tangente all'asse x.*

Soluzione. Osservato che l'asse x ha equazione $y=0$, possiamo seguire lo stesso procedimento. Il disegno, però, fa capire bene che la circonferenza passa dal punto $H(-2\,;\,0)$, per cui il raggio R è $\overline{CH}=6$; l'equazione, pertanto, risulta essere:

$$(x+2)^2+(y-6)^2=6^2\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+4\,x-12\,y+4=0\ .$$

Esempio 23. *Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza avente centro in $C(5\,;\,-2)$ e tangente alla retta $r:2\,x-y+3=0$.* *Soluz.* $x^2+y^2-10\,x+4\,y-16=0$.

Esempio 24. *Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza avente centro in $C(-1\,;\,0)$ e tangente alla retta $r:y=3\,x-2$.* *Soluz.* $x^2+y^2+2\,x-\dfrac{3}{2}=0$.

Rette tangenti condotte da un punto ad una circonferenza

Vogliamo determinare le equazioni delle rette passanti per un punto assegnato e tangenti ad una circonferenza assegnata. Esistono tanti metodi per affrontare questo problema; noi analizzeremo tre procedimenti risolutivi.

Primo metodo. Dato il punto $P=(x_P\,;\,y_P)$, basta scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per il punto P e sostituire l'espressione nell'equazione della circonferenza.

Una volta semplificata l'espressione algebrica, si impone che le due intersezioni coincidano, annullando il discriminante dell'equazione ($\Delta=0$); se il punto P scelto all'inizio è esterno alla circonferenza si trovano due rette tangenti.

Esempio 25. *Trovare le rette tangenti condotte dal punto $P=(2\,;\,5)$ alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-6\,x+4\,y-12=0$.*

Scriviamo prima di tutto il fascio dei rette passanti per P:

$$y=m(x-x_P)+y_P\quad\Rightarrow\quad y=m(x-2)+5$$

sostituiamo l'ultima espressione scritta in quella della circonferenza:

$$\begin{cases}x^2+y^2-6\,x+4\,y-12=0\\ y=m(x-2)+5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x^2+(m(x-2)+5)^2-6\,x+4\cdot(m(x-2)+5)-12=0$$

sviluppando troviamo:

$$x^2+m^2\,x^2-4\,m^2x+14\,mx+4\,m^2-28\,m+33-6\,x=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1+m^2)x^2 + (14\,m - 4\,m^2 - 6)x + 4\,m^2 - 28\,m + 33 = 0$$

a questo punto calcoliamo il Δ (che risulterà essere in funzione di m):

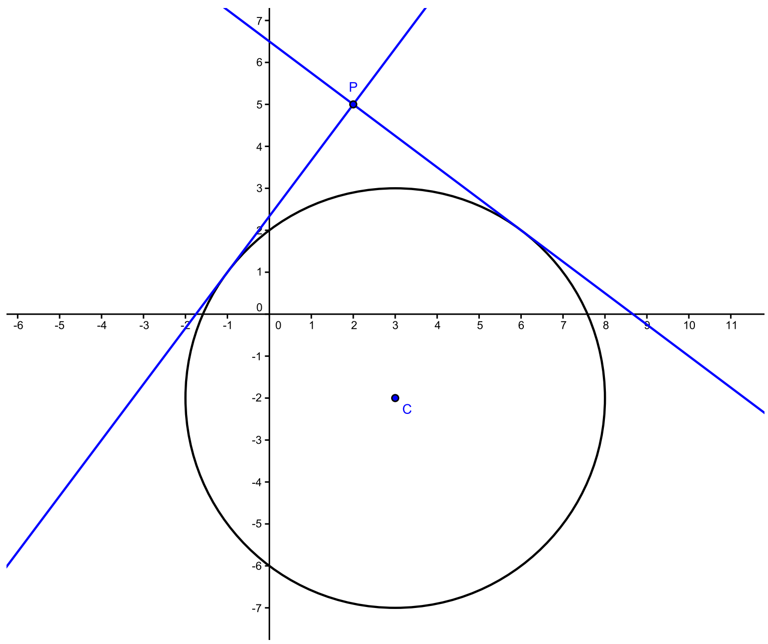
$$\Delta = b^2 - 4ac = (14\,m - 4\,m^2 - 6)^2 - 4 \cdot (1+m^2) \cdot (4\,m^2 - 28\,m + 33) = 96\,m^2 - 56\,m - 96\,.$$

Ora calcoliamo le soluzioni dell'equazione $96\,m^2 - 56\,m - 96 = 0$; osserviamo che l'equazione può essere divisa per 8, ottenendo così $12\,m^2 - 7\,m - 12 = 0$ si ottiene:

$$m_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot(12)\cdot(-12)}}{2\cdot 12} = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{24} = \frac{7 \pm 25}{24} \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{4}{3} \\[2ex] \searrow \quad x_2 = -\dfrac{3}{4} \end{array} \quad ;$$

le due rette tangenti hanno perciò equazione:

$$y = \frac{4}{3}(x-2) + 5 \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}(x-2) + 5 \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}\,.$$



Esempio 26. *Trovare le rette tangenti condotte dal punto $P = (1\,;\,2)$ alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$.*
Soluzione. Scriviamo prima di tutto il fascio dei rette passanti per P:

$$y = m(x - x_P) + y_P \quad \Rightarrow \quad y = m(x-1) + 2$$

sostituiamo l'ultima espressione scritta in quella della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y = m(x-1) + 2 \end{cases} \Rightarrow \; x^2 + (m(x-1)+2)^2 - 4 = 0$$

sviluppando troviamo:

$$x^2 + m^2x^2 - 2\,m^2x + 4\,mx + m^2 - 4\,m = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (1+m^2)x^2 + (4\,m - 2\,m^2)x + m^2 - 4\,m = 0$$

a questo punto calcoliamo il Δ (che risulterà essere in funzione di m):

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4\,m - 2\,m^2)^2 - 4\cdot(1+m^2)\cdot(m^2 - 4\,m) = 12m^2 + 16\,m\,.$$

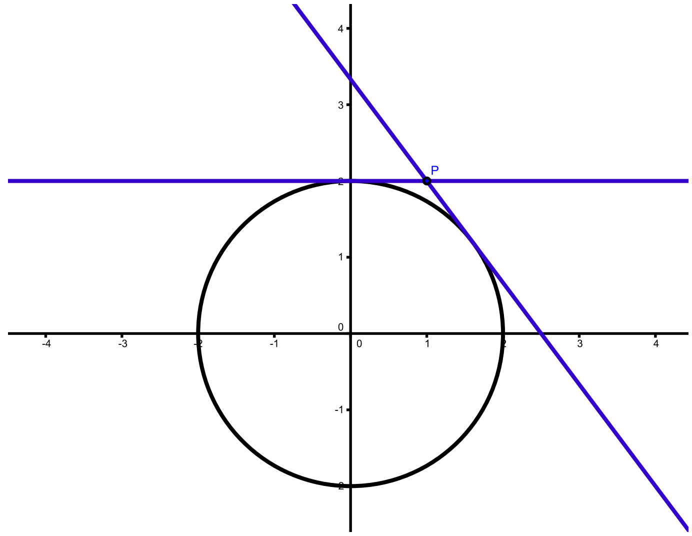
Calcolando ora le soluzioni dell'equazione $12m^2 + 16m = 0$; dividendo per 4 abbiamo $3\,m^2 + 4\,m = 0$ e quindi risulta:

$$m_1 = 0 \quad ; \quad m_2 = -\frac{3}{4}\,;$$

le equazioni delle due rette tangenti sono

$$y = 0\cdot(x-1) + 2 \;\Rightarrow\; y = 2 \;\; \text{(retta parallela all'asse } x\text{)}$$

$$y = -\frac{3}{4}\cdot(x-1) + 2 \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}\,.$$



Osservazione 27. Si possono verificare questi casi:

- se l'equazione in m è di secondo grado e ammette due soluzioni distinte $\Rightarrow$ il punto P è esterno e le rette tangenti sono entrambe non parallele all'asse y;
- se l'equazione in m è di secondo grado e ammette due soluzioni coincidenti $\Rightarrow$ il punto P appartiene alla circonferenza e l'unico valore trovato fornisce il coefficiente angolare della retta tangente in P (non parallela all'asse y);
- se l'equazione in m è di primo grado $\Rightarrow$ il punto P è esterno, una retta tangente è parallela all'asse y (ed ha equazione $x = x_P$) mentre l'altra tangente ha coefficiente angolare uguale all'unica soluzione calcolata;
- se l'equazione in m è di secondo grado e non ammette soluzioni significa che il punto P è interno alla circonferenza;
- se l'equazione in m è di grado zero (ovvero se m non compare) $\Rightarrow$ il punto P appartiene alla circonferenza e la retta tangente è parallela all'asse y (ed ha equazione $x = x_P$).

Secondo metodo. Vediamo ora un altro metodo, del tutto equivalente al precedente:

1. si calcola il centro $C = (x_C\,;\,y_C)$ e il raggio R della circonferenza;
2. dal momento che le rette tangenti ad una circonferenza hanno la proprietà di avere distanza dal centro uguale al raggio della circonferenza, si impone l'equazione algebrica:

$$d = R \quad \Rightarrow \quad \frac{|y_C - m(x_C - x_P) - y_P|}{\sqrt{1+m^2}} = R \tag{7}$$

   da cui, moltiplicando per $\sqrt{1+m^2}$ ed elevando al quadrato, si ottiene:

$$(y_C - m(x_C - x_P) - y_P)^2 = (1+m^2)R^2$$

   risolvendo l'ultima equazione si trovano i valori numerici di m.

Osservazione 28. Il primo metodo è più generale, in quanto può essere applicato anche al calcolo delle rette tangenti ad un'ellisse oppure ad un'iperbole. Il secondo metodo è creato "ad hoc" per la circonferenza (è più "naturale"), e non può però essere utilizzato per le altre curve del piano.

Osservazione 29. Valgono le stesse proprietà elencate nell'osservazione 27.

Esempio 30. *Applicare questo nuovo metodo all'esempio* 26 *(dobbiamo ritrovare gli stessi risultati, dal momento che i due metodi sono equivalenti).*
Soluzione. Il centro C è l'origine delle coordinate e il raggio è $R = 2$; l'equazione della generica retta passante per P è:

$$y = m(x - x_P) + y_P \quad \Rightarrow \quad y = m(x-1) + 2$$

applicando la formula (7) si trova:

$$\frac{|y_C - m(x_C - x_P) - y_P|}{\sqrt{1+m^2}} = R \quad \Rightarrow \quad \frac{|0 - m(0-1) - 2|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|m-2|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \quad \Rightarrow \frac{(m-2)^2}{1+m^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (m-2)^2 = 4\cdot(1+m^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 4 - 4\,m = 4 + 4\,m^2 \quad \Rightarrow \quad 3\,m^2 + 4\,m = 0$$

Abbiamo così ritrovato la stessa equazione dell'esempio 26 (come avevamo preventivato).

Esempio 31. *Calcolare le rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4 = 0$ condotte dal punto $P = (3; 0)$.*
Soluzione. Il centro della circonferenza è l'origine delle coordinate $C(0\,;\,0)$ mentre il raggio è $R = 2$; scriviamo il fascio di rette passanti per P:

$$y = m(x - 3)$$

applicando la formula (7) si trova:

$$\frac{|0 - m(0-3) - 0|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{|3\,m|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{9\,m^2}{1+m^2} = 4 \;\Rightarrow\; 9\,m^2 = 4(1+m^2) \;\Rightarrow\; 5\,m^2 = 4 \;\Rightarrow\; m_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} \;\Rightarrow\; m_{1;2} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

in definitiva le equazioni delle due rette tangenti sono le seguenti:

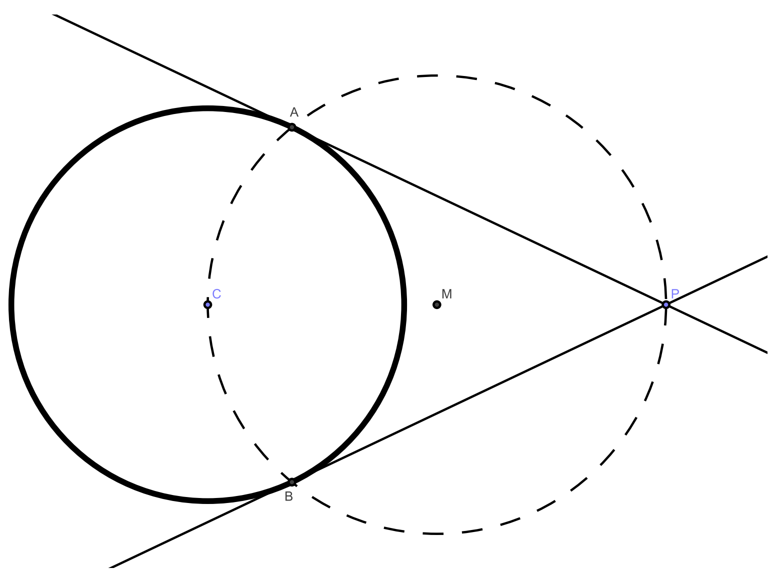
$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}\,(x-3) \quad ; \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,(x-3)\,.$$

Esempio 32. *Calcolare le rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 25 = 0$ condotte dal punto $P = (3\,;\,4)$.*
Risultato:

$$y = -\frac{3}{4}(x-3) + 4 \quad \text{(si trova una retta sola perché } P \text{ sta sulla circonferenza)}\,.$$

Terzo metodo. Analizziamo infine un altro metodo: la costruzione delle rette tangenti può essere fatta con riga e compasso e consiste nei seguenti passi (si faccia riferimento alla figura 1):

1. si costruisce il punto M medio tra C e P (M è l'intersezione dell'asse del segmento CP con il segmento stesso);
2. si punta il compasso in M con apertura $\overline{MC}$ $(= \overline{MP})$ e si traccia la circonferenza;
3. si individuano così due punti di intersezione tra le due circonferenze, cioè A e B ;
4. si tracciano le due rette tangenti PA e PB.



Esempio 33. *Risolvere l'esempio 25 con questo terzo metodo.*
Il punto medio tra i punti $C(3\,;\,-2)$ e $P(2\,;\,5)$ è il punto $M\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$; l'equazione della circonferenza di centro M e raggio pari a $\overline{MC}$ è $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 - 5\,x - 3\,y - 4 = 0$; intersecando ora le due circonferenze troviamo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6\,x + 4\,y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5\,x - 3\,y - 4 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -x + 7\,y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5\,x - 3\,y - 4 = 0 \end{cases}$$

le due intersezioni sono i due punti di tangenza: $A(6\,;\,2)$ e $B(-1\,;\,1)$. Per ottenere le equazioni delle rette tangenti basta calcolare l'equazione della retta AP e della retta BP: si ritrovano così le equazioni $y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{13}{2}$ e $y = \frac{4}{3}\,x + \frac{7}{3}$.