

## L'asintoto polinomiale di una funzione razionale

Francesco Daddi - Marzo 2009

Mediante la divisione polinomiale è possibile ricavare informazioni sul comportamento per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$  di una funzione razionale; in particolare, è possibile determinare l'equazione del suo asintoto polinomiale. Vediamo alcuni esempi.

Supponiamo di studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 2};$$

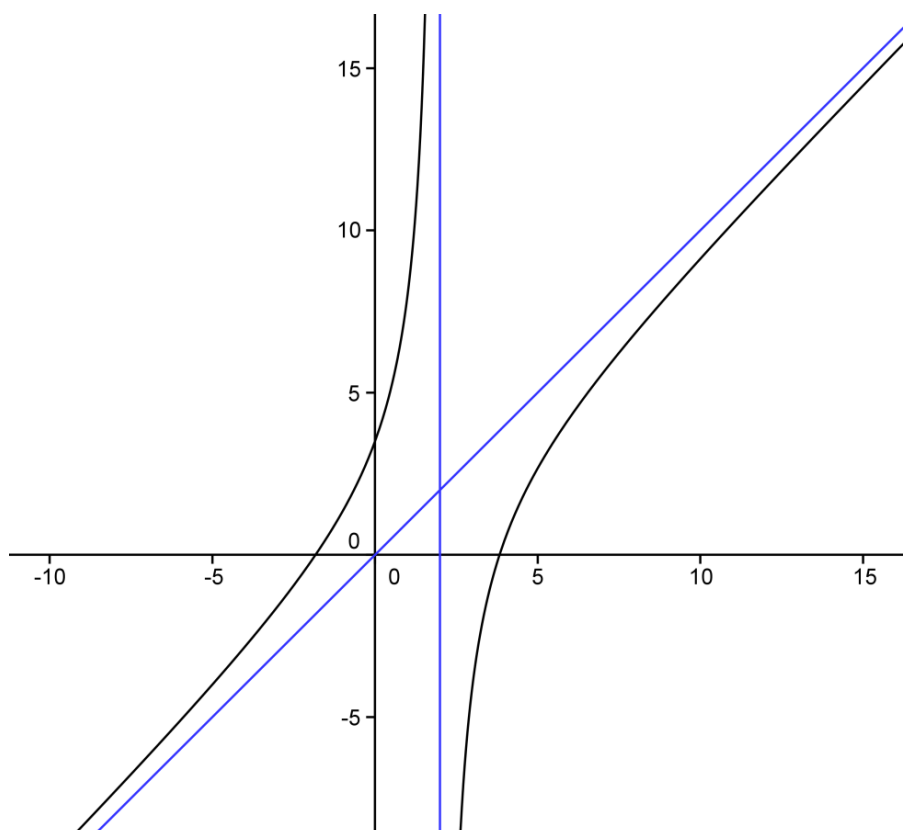
si verifica facilmente che un asintoto verticale è costituito dalla retta di equazione  $x = 2$ ; eseguiamo ora la divisione polinomiale:

$$x^2 - 2x - 7 = (x - 2)x - 7$$

si ottiene quoziente  $Q(x) = x$  e resto  $R = -7$ . La funzione può, quindi, essere riscritta così:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 2} = x - \frac{7}{x - 2};$$

possiamo concludere che la retta  $y = x$  è un asintoto per la funzione; non solo, ma possiamo notare che, essendo la quantità  $-\frac{7}{x-2}$  è negativa per  $x > 2$ , la funzione "sta sotto" l'asintoto per  $x \rightarrow +\infty$ . Si veda la figura qui sotto.



## L'asintoto polinomiale di una funzione razionale - Francesco Daddi

Per  $x \rightarrow -\infty$ , invece, la funzione “sta sopra” l'asintoto (il ragionamento è del tutto analogo al precedente; si faccia riferimento ancora alla figura precedente).

Vediamo ora un altro esempio:

$$y = \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4};$$

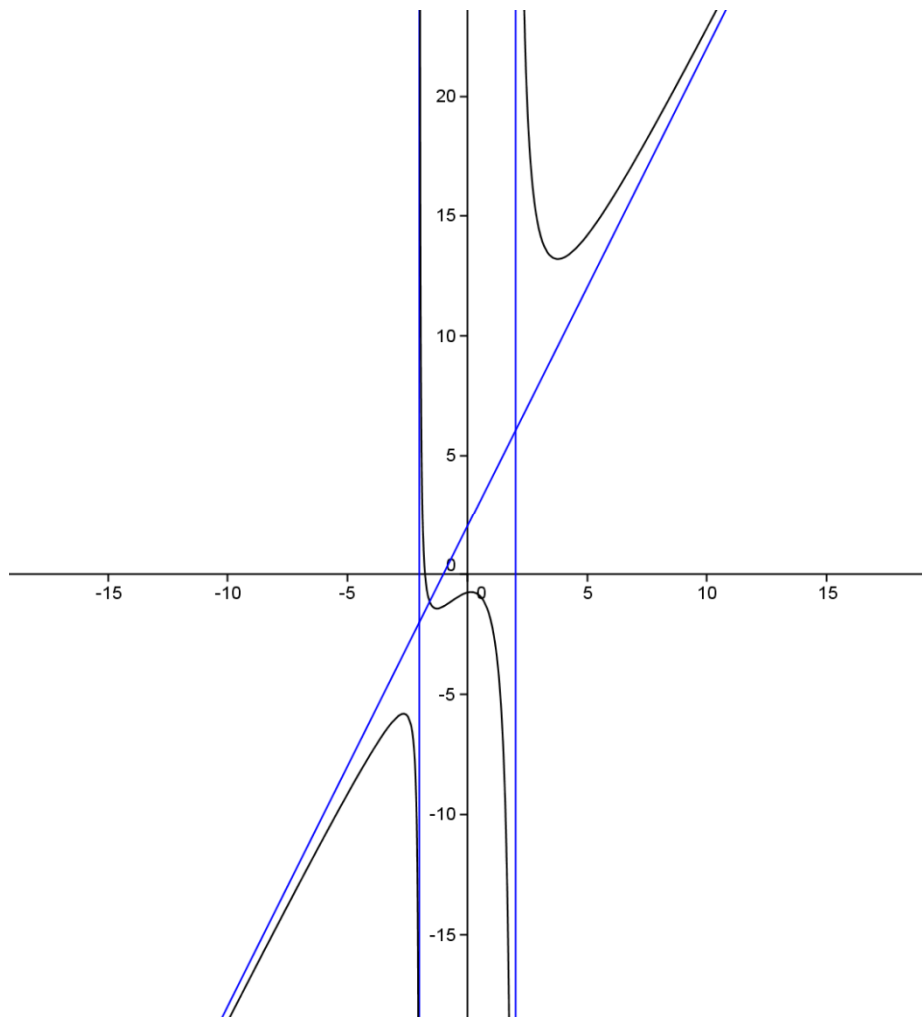
si verifica facilmente che il grafico ha due asintoti verticali, aventi equazioni  $x=2$  e  $x=-2$ ; se calcoliamo il quoziente e il resto con la divisione polinomiale troviamo:

$$2x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x^2 - 4)(2x + 2) + 7x + 11$$

e quindi abbiamo:

$$y = 2x + 2 + \frac{7x + 11}{x^2 - 4}.$$

La retta di equazione  $y = 2x + 2$  è, perciò, un asintoto; il grafico della funzione “sta sopra” la retta per  $x \rightarrow +\infty$ , mentre il viceversa accade per  $x \rightarrow -\infty$ . Si veda la figura.



Analizziamo ora il caso degli asintoti non lineari. Vediamo ad esempio la funzione

$$y = \frac{x^3 - 2x + 3}{x - 1};$$

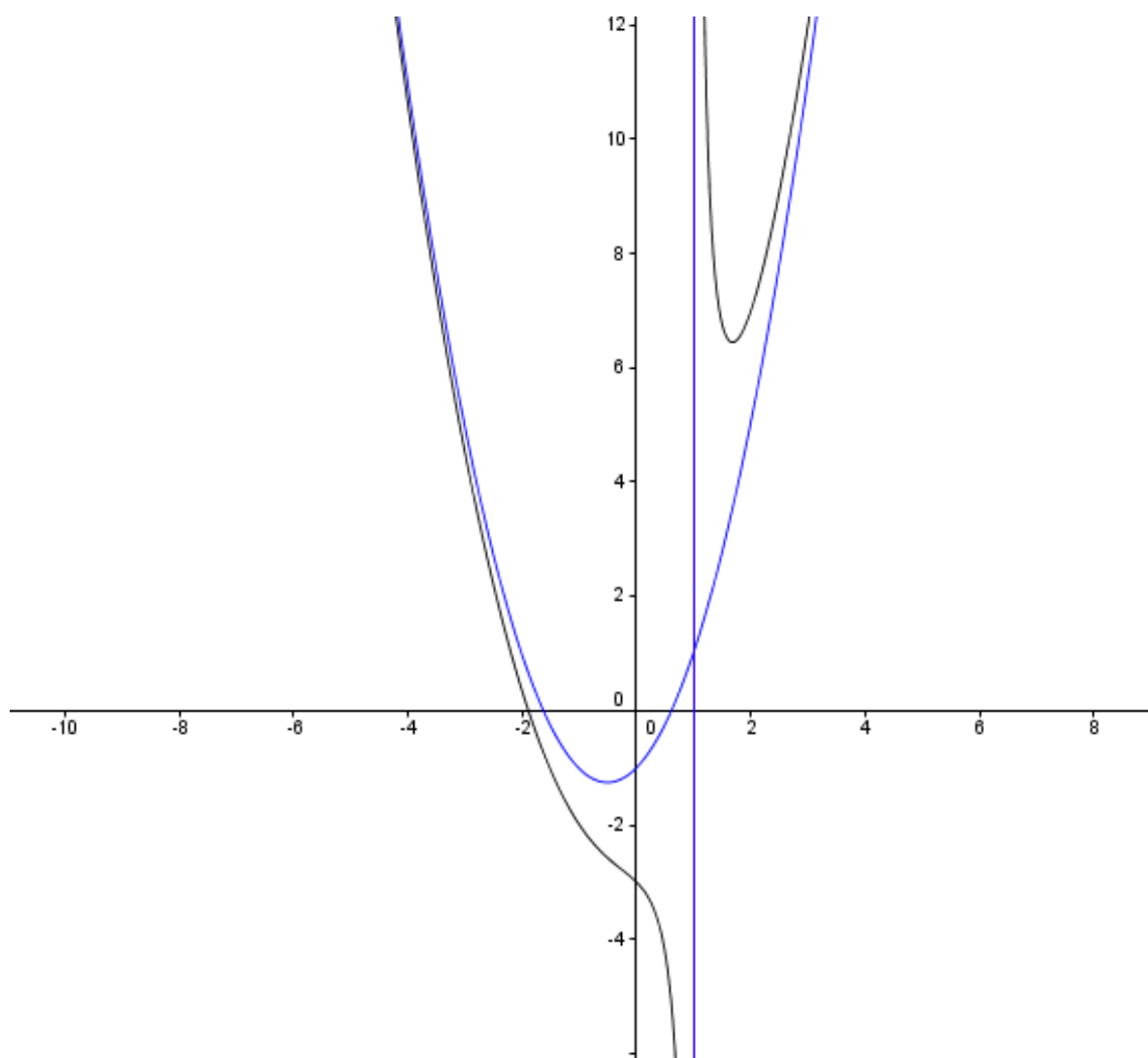
si verifica facilmente che il grafico ha per asintoto verticale la retta di equazione  $x = 1$ . Calcolando il quoziente ed il resto della divisione polinomiale abbiamo:

$$x^3 - 2x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 1) + 2$$

perciò possiamo scrivere:

$$y = x^2 + x - 1 + \frac{2}{x - 1};$$

il grafico ha per asintoto la parabola di equazione  $y = x^2 + x - 1$ .



Per  $x \rightarrow +\infty$  il grafico della funzione “sta sopra” la parabola, mentre il viceversa accade per  $x \rightarrow -\infty$ .