Liceo “Carducci” Volterra - Prof. Francesco Daddi - 21 dicembre 2011

Esercizi svolti sui limiti - Classe 3^aA Classico

Esercizio 1. *Calcolare* $\lim_{x\to 2^+} \frac{7-x}{x-2}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to 2^+} \frac{7-x}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$.

Esercizio 2. *Calcolare* $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+5}{3-3\,x}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+5}{3-3\,x} = \frac{6}{0^-} = -\infty$.

Esercizio 3. *Calcolare* $\lim_{x\to 3^-} \frac{1-2\,x}{9-x^2}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to 3^-} \frac{1-2\,x}{9-x^2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$.

Esercizio 4. *Calcolare* $\lim_{x\to -2^-} \frac{x-x^2}{3\,x+6}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to -2^-} \frac{x-x^2}{3\,x+6} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$.

Esercizio 5. *Calcolare* $\lim_{x\to -5^-} \frac{7-3\,x}{25-x^2}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to -5^-} \frac{7-3\,x}{25-x^2} = \frac{22}{0^-} = -\infty$.

Esercizio 6. *Calcolare* $\lim_{x\to 2^+} \frac{5-3\,x}{x^2-6\,x+8}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to 2^+} \frac{5-3\,x}{x^2-6\,x+8} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$.

Esercizio 7. *Calcolare* $\lim_{x\to -3^+} \frac{8\,x^2-x-5}{(x+3)^6}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to -3^+} \frac{8\,x^2-x-5}{(x+3)^6} = \frac{70}{0^+} = +\infty$.

Esercizio 8. *Calcolare* $\lim_{x\to -5^+} \frac{x+2}{(2\,x+10)^9}$. **Soluzione.** Risulta: $\lim_{x\to -5^+} \frac{x+2}{(2\,x+10)^9} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$.

Esercizio 9. *Calcolare* $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-4\,x+3}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; fattorizzando il denominatore si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-4\,x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-3)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} .$$

Esercizio 10. *Calcolare* $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x^2+4\,x+4}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; fattorizzando il numeratore ed il denominatore si ha:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x^2+4\,x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+2)\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty .$$

Esercizio 11. *Calcolare* $\lim_{x\to 5} \frac{10\,x-x^2-25}{x^2-7\,x+10}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; fattorizzando il numeratore ed il denominatore si ha:

$$\lim_{x\to 5} \frac{10\,x-x^2-25}{x^2-7\,x+10} = \lim_{x\to 5} \frac{-(x-5)(x-5)}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x\to 5} \frac{-\cancel{(x-5)}(x-5)}{\cancel{(x-5)}(x-2)} = \lim_{x\to 5} \frac{-(x-5)}{x-2} = \frac{0}{3} = 0 .$$

Esercizio 12. *Calcolare* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{4\,x}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x+9}+3$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{4\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{4\,x} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} = \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{4\,x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{4\cdot\left(\sqrt{9}+3\right)} = \frac{1}{24} .$$

Esercizio 13. *Calcolare* $\lim_{x\to 2} \frac{5-\sqrt{9+8\,x}}{x^2-3\,x+2}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; moltiplicando numeratore e denominatore per $5+\sqrt{9+8\,x}$ si ha:

$$\lim_{x\to 2} \frac{5-\sqrt{9+8\,x}}{x^2-3\,x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{5-\sqrt{9+8\,x}}{x^2-3\,x+2} \cdot \frac{5+\sqrt{9+8\,x}}{5+\sqrt{9+8\,x}} = \lim_{x\to 2} \frac{25-(9+8\,x)}{(x^2-3\,x+2)\cdot\left(5+\sqrt{9+8\,x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{16-8\,x}{(x^2-3\,x+2)\cdot\left(5+\sqrt{9+8\,x}\right)}$$; fattorizzando al denominatore $(x^2-3\,x+2)$ si ha:

$$\lim_{x\to 2} \frac{8(2-x)}{(x-2)\cdot(x-1)\cdot\left(5+\sqrt{9+8\,x}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{-8\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-1)\cdot\left(5+\sqrt{9+8\,x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-8}{(x-1)\cdot\left(5+\sqrt{9+8\,x}\right)} = \frac{-8}{(2-1)\cdot\left(5+\sqrt{9+8\cdot 2}\right)} = -\frac{4}{5}\,.$$

Esercizio 14. *Calcolare* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\,x+1}-\sqrt{3\,x+1}}{\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x+4}}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}\right)$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\,x+1}-\sqrt{3\,x+1}}{\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x+4}}\cdot\frac{\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}}{\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2\,x+1-(3\,x+1))\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}\right)}{(x^2+16-4(x+4))\cdot\left(\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}\right)}{(x^2-4\,x)\cdot\left(\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}\right)}{\left(x^{\cancel{2}}-4\,\cancel{x}\right)\cdot\left(\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4}\right)}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{2\,x+1}+\sqrt{3\,x+1}\right)} = \frac{-(4+4)}{(-4)\cdot(1+1)} = 1\,.$$

Esercizio 15. *Calcolare* $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; moltiplicando per $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}\cdot(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}\cdot(\sqrt{x}+1) =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-1)}}\cdot(\sqrt{x}+1) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot(\sqrt{x}+1) = +\infty\cdot 2 = +\infty\,.$$

Esercizio 16. *Calcolare* $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+5\,x^3-3\,x^2+x-6}{2\,x^3-x+5}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; mettiamo in evidenza x^4 al numeratore e x^3 al denominatore:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x\to +\infty} x\cdot\frac{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^4}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = +\infty\cdot\frac{1}{2} = +\infty\,.$$

Esercizio 17. *Calcolare* $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{8\,x^{14}-3\,x^5+x^3-x^2+2}}{5\,x^4-x^2+x-5}$. **Soluzione.** Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; mettiamo in evidenza x^{14} dentro il radicale al numeratore e x^4 al denominatore:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^{14}\cdot\left(8-\frac{3}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}-\frac{1}{x^{12}}+\frac{2}{x^{14}}\right)}}{x^4\cdot\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|^7\cdot\sqrt{8-\frac{3}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}-\frac{1}{x^{12}}+\frac{2}{x^{14}}}}{x^4\cdot\left(5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} -x^3\cdot\frac{\sqrt{8-\frac{3}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}-\frac{1}{x^{12}}+\frac{2}{x^{14}}}}{5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}} = -(-\infty)^3\cdot\frac{\sqrt{8}}{5} = +\infty\,.$$

Esercizio 18. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5\,x^2-4\,x-2\,\sqrt{x}+3}{2\,x^2-x+\sqrt{x}}$. **<u>Soluzione.</u>** Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$; mettiamo in evidenza x^2 al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5\,x^2-4\,x-2\,\sqrt{x}+3}{2\,x^2-x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)} = \frac{5}{2}\,.$$

Esercizio 19. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2\,x-3}-x$. **<u>Soluzione.</u>** Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$; moltiplichiamo per $\dfrac{\sqrt{x^2+2\,x-3}+x}{\sqrt{x^2+2\,x-3}+x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2\,x-3}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2\,x-3}+x}{\sqrt{x^2+2\,x-3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2\,x-3-x^2}{\sqrt{x^2+2\,x-3}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x-3}{\sqrt{x^2+2\,x-3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+1\right)} = \frac{2}{1+1} = 1\,.$$

Esercizio 20. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5\,x^2+4\,x-7}-3\,x$. **<u>Soluzione.</u>** Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$; possiamo procedere come visto nell'esercizio precedente moltiplicando per $\dfrac{\sqrt{5\,x^2+4\,x-7}+3\,x}{\sqrt{5\,x^2+4\,x-7}+3\,x}$. In questo esercizio, però, è possibile seguire un altro metodo: mettendo in evidenza x^2 dentro il radicale risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5\,x^2+4\,x-7}-3\,x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(5+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}-3\,x = \lim_{x\to+\infty} |x|\cdot\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}-3\,x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}-3\,x = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}-3\right) = +\infty\cdot\left(\sqrt{5}-3\right) = -\infty\,.$$

Esercizio 21. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4\,x-7}-3\,x$. **<u>Soluzione.</u>** Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4\,x-7} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} -3\,x = +\infty$, si ha che $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4\,x-7}-3\,x = +\infty$.

Esercizio 22. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}$. **<u>Soluzione.</u>** Al denominatore si presenta una forma di indeterminazione del tipo $-\infty+\infty$; moltiplichiamo per $\dfrac{x-\sqrt{x^2+2}}{x-\sqrt{x^2+2}}$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+2}}{x-\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+2}}{x^2-(x^2+2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+2}}{-2} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-(-x)\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{-2} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+x\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{-2} = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{-2} = (-\infty)\cdot\frac{1+1}{-2} = +\infty\,.$$