

Esercizi sul moto lungo un piano inclinato

3^aB Scientifico - 20 aprile 2011

N.B. Tutti i piani inclinati sono lisci (senza attrito).

Esercizio 1. Un corpo di massa $M = 10 \text{ kg}$ si trova in cima ad un piano inclinato. Sapendo che la lunghezza del piano è di 2 m e la sua altezza è pari a 1 m , determinare:

- l'accelerazione con la quale si muove;
- il modulo della reazione del piano;
- il tempo che impiega a percorrere tutto il piano;
- la velocità finale.

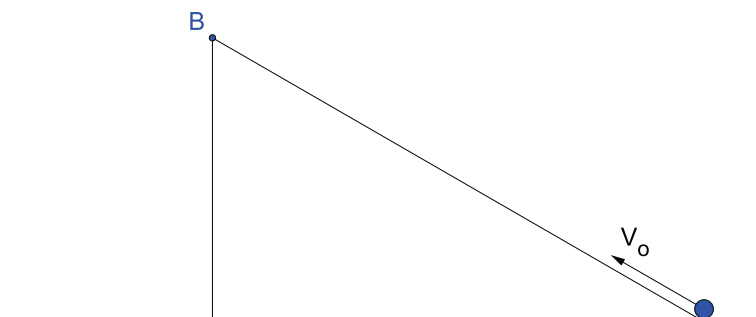
Esercizio 2. Un corpo di massa $M = 8 \text{ kg}$ viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato con una velocità iniziale di 2 m/s . Sapendo che il corpo percorre 3 m prima di fermarsi, si determini:

- l'inclinazione del piano;
- il modulo della reazione del piano;
- il tempo che impiega per fermarsi;
- la velocità del corpo quando passa nuovamente dalla posizione iniziale. Cosa osservi?

Esercizio 3. Un corpo di massa $M = 6 \text{ kg}$ si trova in cima ad un piano inclinato, alto 1 m e lungo 4 m ; sapendo che viene lanciato verso il basso con una velocità iniziale pari a 3 m/s , determinare:

- l'accelerazione con la quale si muove;
- il modulo della reazione del piano;
- il tempo che impiega a percorrere tutto il piano;
- il modulo della velocità finale.

Esercizio 4. Un corpo di massa $M = 4 \text{ kg}$ viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato (altezza $= 2 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$) con una velocità iniziale pari a 15 m/s . Si veda la figura.



- Quanto tempo impiega a giungere in cima al piano inclinato (punto B)?
- Studiare in modo accurato il moto successivo.
Ci sono dei dati superflui?

Esercizio 5. Sono assegnati tre piani inclinati A (altezza $= 2 \text{ m}$, $\theta_A = 30^\circ$), B (altezza $= 2 \text{ m}$, $\theta_B = 45^\circ$), C (altezza $= 2 \text{ m}$, $\theta_C = 60^\circ$). Tre corpi di massa $M_A = 5 \text{ kg}$, $M_B = 3 \text{ kg}$, $M_C = 2 \text{ kg}$ scivolano sui piani, rispettivamente, A , B , C .

Si determini:

- il tempo che ciascun corpo impiega a percorrere il piano inclinato;
- la velocità finale di ciascun corpo. Cosa osservi?
Ci sono dei dati superflui?

Soluzione degli esercizi sul moto lungo un piano inclinato

3^aB Scientifico - 20 aprile 2011

Esercizio 1. Scegliamo l'asse x rivolto verso il basso.

a) $a_x = g \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_x = 4,9 \text{ m/s}^2$.

b) $F_N = Mg \cos \theta \Rightarrow F_N \approx 84,9 \text{ N}$.

c) $x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 4,9 t^2$. Poiché il piano è lungo 2 m , risulta:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 4,9 t^2 \Rightarrow t \approx 0,90 \text{ s}.$$

d) La velocità finale v_f si ottiene nel seguente modo:

$$v_f^2 - 0^2 = 2 \cdot 4,9 \cdot (2 - 0) \Rightarrow v_f \approx 4,43 \text{ m/s}.$$

Esercizio 2. Scegliamo l'asse x rivolto verso il basso.

a) $0^2 - (-2)^2 = 2 \cdot a_x \cdot (-3 - 0) \Rightarrow a_x \approx 0,67 \text{ m/s}^2$; poiché $a_x = g \sin \theta$, si ha $\theta \approx 0,068 \text{ rad}$ (circa 4°).

b) $F_N = Mg \cos \theta \Rightarrow F_N \approx 78,2 \text{ N}$.

c) La legge oraria del corpo è $x = -2t + \frac{1}{2} \cdot 0,67 t^2$, quindi, per calcolare il tempo che impiega a fermarsi, dobbiamo risolvere l'equazione

$$-3 = -2t + \frac{1}{2} \cdot 0,67 t^2 \Rightarrow t = 3 \text{ s}.$$

d) $v_f^2 - (-2)^2 = 2 a_x (0 - 0) \Rightarrow v_f = 2 \text{ m/s}$; la velocità ha lo stesso modulo di quella iniziale e verso, ovviamente, opposto.

Esercizio 3. Scegliamo l'asse x rivolto verso il basso.

a) $a_x = g \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow a_x = 2,45 \text{ m/s}^2$.

b) $F_N = Mg \cos \theta \Rightarrow F_N \approx 56,9 \text{ N}$.

c) $x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow x = 3t + \frac{1}{2} \cdot 2,45 t^2$; poiché il piano inclinato è lungo 4 m , si ha:

$$4 = 3t + \frac{1}{2} \cdot 2,45 t^2 \Rightarrow t \approx 0,96 \text{ s}$$

d) $v_f^2 - 3^2 = 2 \cdot 2,45 \cdot (4 - 0) \Rightarrow v_f \approx 5,35 \text{ m/s}$.

Esercizio 4. Scegliamo l'asse x rivolto verso il basso.

a) Calcoliamo la velocità del corpo quando arriva in cima al piano inclinato:

$$v_f^2 - (-15)^2 = 2 \cdot (9,8 \cdot \sin 30^\circ) \cdot (-4 - 0) \Rightarrow v_f^2 = 15^2 + 2 \cdot 4,9 \cdot (-4) \Rightarrow v_f \approx 13,63 \text{ m/s}.$$

Calcoliamo ora il tempo impiegato per percorrere tutto il piano inclinato:

$$-13,63 = -15 + 4,9 \cdot t \Rightarrow t \approx 0,28 \text{ s} .$$

Alternativamente possiamo determinare il tempo nei seguenti due modi:

$$\frac{-15 - 13,63}{2} \cdot t = -4 \Rightarrow t \approx 0,28 \text{ s} ;$$

$$-4 = 0 - 15t + \frac{1}{2} \cdot 4,9t^2 \Rightarrow t \approx 0,28 \text{ s} \quad (\text{l'altra soluzione va scartata}).$$

b) Si tratta di un moto parabolico con velocità iniziale di modulo pari a $13,63 \text{ m/s}$ e con angolo iniziale $\theta = 30^\circ$. La legge oraria è

$$\begin{cases} x = 13,63 \cdot \cos(30^\circ) t \\ y = 2 + 13,63 \cdot \sin(30^\circ) t - 4,9 t^2 \end{cases}$$

il corpo descrive una traiettoria parabolica e finisce a terra quando $y = 0$, ovvero

$$0 = 2 + 13,63 \cdot \sin(30^\circ) t - 4,9 t^2 \Rightarrow t = 1,64 \text{ s} \quad (\text{la soluzione negativa va scartata})$$

la gittata è

$$x \approx 19,4 \text{ m} .$$

La quota massima y_{max} raggiunta è

$$0^2 - (13,63 \cdot \sin(30^\circ))^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y_{max} - 2) \Rightarrow y_{max} \approx 4,37 \text{ m} .$$

Esercizio 5. a) In generale abbiamo:

$$\frac{h}{\sin \theta} = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\sin \theta} ;$$

sostituendo i valori numerici si trovano i seguenti risultati:

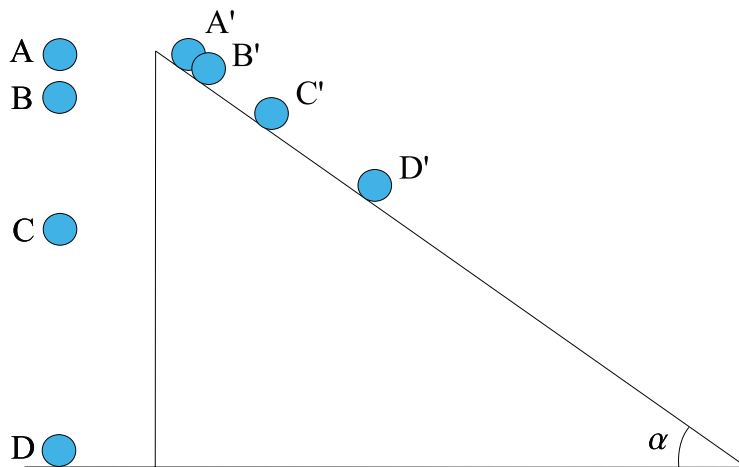
$$t_A \approx 1,28 \text{ s} ; t_B \approx 0,90 \text{ s} ; t_C \approx 0,74 \text{ s} .$$

b) La velocità finale è

$$v_f^2 - 0^2 = 2 \cdot g \cdot \sin \theta \left(\frac{h}{\sin \theta} - 0 \right) \Rightarrow v_f^2 = 2 \cdot g \cdot \sin \theta \left(\frac{h}{\sin \theta} \right) \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

la velocità è uguale per i tre corpi e risulta quindi indipendente dalla massa e dall'angolo θ . Sostituendo $h = 2 \text{ m}$ si trova $v_f \approx 6,26 \text{ m/s}$.

Osserviamo che, se prendiamo $\theta = 90^\circ$, siamo in presenza di una caduta libera; in figura si confronta tale caduta con il moto lungo il piano inclinato:



la massa in caduta libera verticale impiega circa $0,64 \text{ s}$ per giungere al suolo, ma la velocità finale è uguale per entrambe le masse.