

Esercizi svolti sulle equazioni differenziali

Esercizio 2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{da cui} \quad \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$$

l'integrale generale dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = 0$ è $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$; imponendo che $y(0) = 1$ abbiamo

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1e^0 + C_2e^{2 \cdot 0} = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1;$$

derivando l'integrale generale abbiamo $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} \Rightarrow y'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$, quindi l'altra condizione $y'(0) = \frac{1}{2}$ diventa:

$$y'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1e^0 + 2C_2e^{2 \cdot 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 + 2C_2 = \frac{1}{2};$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{2x}$.

