Liceo Classico "Galilei" Pisa - Classe 2^aA - Prof. Francesco Daddi - 19 dicembre 2011

Esercizi svolti sulla parabola

Esercizio 1. *Determinare l'equazione della parabola avente fuoco in $F(1,-1)$ e per direttrice la retta $d: y=-2$.*
Soluzione. La parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco F e dalla direttrice, per cui si ha

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=|y+2| \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x^2-x-1\,.$$

Esercizio 2. *Determinare l'equazione della parabola di vertice $V(-2,-3)$ e direttrice $d: y=-7$.*
Soluzione. Dato che il vertice V deve avere la stessa distanza dal fuoco e dalla direttrice, si ha

$$\frac{y_F-7}{2}=-3 \quad\Rightarrow\quad y_F=1 \qquad \text{(il fuoco della parabola è } F(-2,1));$$

la parabola ha quindi equazione $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=|y+7| \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{11}{4}\,.$

Esercizio 3. *Determinare l'equazione della parabola di vertice $V(-6,4)$ e fuoco $F(-6,-6)$.*
Soluzione. Il vertice ha la stessa distanza dal fuoco F e dalla direttrice, che quindi ha equazione $y=14$.
La parabola ha quindi equazione $\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2}=|y-14| \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{40}x^2-\frac{3}{10}x+\frac{31}{10}\,.$

Esercizio 4. *Determinare le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse y, aventi fuoco in $F(3,2)$ e passanti per $P(6,-2)$.*
Soluzione. Si tratta di determinare le rette d, parallele all'asse delle x, tali che P sia equidistante da F e dalle rette d; poiché $\overline{PF}=5$, le due rette sono $d_1: y=3$, $d_2: y=-7$. Le due parabole con le proprietà volute hanno equazioni

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=|y-3| \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x-2\,;$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=|y+7| \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{3}x-2\,.$$

Esercizio 5. *Determinare le coordinate dei punti di intersezione della retta $y=4$ con la parabola avente fuoco in $F(-4,3)$ e come direttrice la retta $d: y-6=0$. Si risolva l'esercizio senza determinare l'equazione della parabola.*
Soluzione. I punti di intersezione sono della forma $(t,4)$; poiché appartengono alla parabola, sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice e quindi risulta:

$$\sqrt{(t+4)^2+(4-3)^2}=|4-6| \quad\Rightarrow\quad t_{1;2}=-4\pm\sqrt{3}\,;$$

i due punti di intersezione sono $P_1(-4-\sqrt{3}\,,\,4)$ e $P_2(-4+\sqrt{3}\,,\,4)$.

Esercizio 6. *Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y e passante per i punti $A(2,-4)$, $B(-1,2)$, $C(3,-2)$.*
Soluzione. La parabola ha equazione del tipo $y=a\,x^2+b\,x+c$; imponendo il passaggio per i tre punti si ha:

$$\begin{cases} 4\,a+2\,b+c=-4 \\ a-b+c=2 \\ 9\,a+3\,b+c=-2 \end{cases}$$; ricavando c dalla seconda equazione e sostituendo nelle altre due si ottiene

$$\begin{cases} 4\,a+2\,b+2-a+b=-4 \\ c=2-a+b \\ 9\,a+3\,b+2-a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\,a+3\,b=-6 \\ c=2-a+b \\ 8\,a+4\,b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-2 \end{cases}\;;$$

la parabola ha quindi equazione $y=x^2-3\,x-2$.

Esercizio 7. *Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, avente vertice in $V(2,1)$ e passante per $P(3,4)$.*
Soluzione. Primo metodo (semplice). Utilizzando la formula $y - y_V = a(x - x_V)^2$, tutte le parabole con asse parallelo all'asse y ed aventi vertice in $V(2,1)$ hanno equazione del tipo $y - 1 = a(x-2)^2$.

Sostituendo nella precedente formula le coordinate del punto P si ricava il parametro a:

$$4 - 1 = a(3-2)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 3\ ;$$

la parabola ha quindi equazione $y - 1 = 3(x-2)^2$, ovvero $y = 3\,x^2 - 12\,x + 13$.

Secondo metodo. Imponiamo il passaggio per V e P ed imponiamo che $x_V = -\frac{b}{2\,a} = 2$:

$$\begin{cases} 4\,a + 2\,b + c = 1 \\ 9\,a + 3\,b + c = 4 \\ -\dfrac{b}{2\,a} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\,a + 2\,b + c = 1 \\ 9\,a + 3\,b + c = 4 \\ b = -4\,a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\,a - 8\,a + c = 1 \\ 9\,a - 12\,a + c = 4 \\ b = -4\,a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\,a + c = 1 \\ -3\,a + c = 4 \\ b = -4\,a \end{cases}$$

il sistema è risolto per $a = 3$, $b = -12$, $c = 13$: si ottiene di nuovo l'equazione $y = 3\,x^2 - 12\,x + 13$.

Terzo metodo. La parabola ha come asse di simmetria la retta parallela all'asse delle y e passante per $V(2,1)$, ovvero la retta $x = 2$; dato che la parabola passa per $P(3,4)$, passa anche per $P'(1,4)$, simmetrico di P rispetto all'asse di simmetria. Imponendo il passaggio per i punti V, P, P', si ottiene

$$\begin{cases} 4\,a + 2\,b + c = 1 \\ 9\,a + 3\,b + c = 4 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\,a + 2\,b + 4 - a - b = 1 \\ 9\,a + 3\,b + 4 - a - b = 4 \\ c = 4 - a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\,a + b = -3 \\ 8\,a + 2\,b = 0 \\ c = 4 - a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -12 \\ c = 13 \end{cases}$$

si ottiene di nuovo l'equazione $y = 3\,x^2 - 12\,x + 13$.

Esercizio 8. *Determinare l'equazione della parabola passante per i punti $A(4,1)$, $B(5,2)$ ed avente per asse di simmetria la retta $x = 3$.*
Soluzione. Primo metodo. La parabola passa anche per i punti $A'(2,1)$ e $B'(1,2)$, simmetrici rispettivamente di A e B rispetto all'asse di simmetria. Imponendo il passaggio per A, A', B' (ma possiamo scegliere anche un'altra terna di punti) si ottiene l'equazione $y = \dfrac{1}{3}\,x^2 - 2\,x + \dfrac{11}{3}$.

Secondo metodo. Dato che la retta $x = 3$ è asse di simmetria, il vertice ha ascissa pari a 3; l'equazione generica della parabola con vertice $V(3, y_V)$ è $y - y_V = a(x-3)^2$, per cui per risolvere l'esercizio è sufficiente determinare a e y_V. Imponendo il passaggio per A e B si ha

$$\begin{cases} 1 - y_V = a(4-3)^2 \\ 2 - y_V = a(5-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y_V = a \\ 2 - y_V = 4\,a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ y_V = \frac{2}{3} \end{cases}$$

in definitiva l'equazione della parabola è $y - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\,(x-3)^2$, ovvero $y = \dfrac{1}{3}\,x^2 - 2\,x + \dfrac{11}{3}$.

Terzo metodo. Poiché vertice ha ascissa $x = 3$, risulta $x_V = -\frac{b}{2\,a} = 3$; imponendo anche il passaggio per A e B si ha:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2\,a} = 3 \\ 16\,a + 4\,b + c = 1 \\ 25\,a + 5\,b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6\,a \\ 16\,a + 4\,b + c = 1 \\ 25\,a + 5\,b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6\,a \\ 16\,a - 24\,a + c = 1 \\ 25\,a - 30\,a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6\,a \\ -8\,a + c = 1 \\ -5\,a + c = 2 \end{cases}$$

il sistema è risolto per $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -2$, $c = \dfrac{11}{3}$; si ottiene di nuovo l'equazione $y = \dfrac{1}{3}\,x^2 - 2\,x + \dfrac{11}{3}$.

Esercizio 9. *Determinare le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto $P(1,-3)$ alla parabola $y = 2\,x^2 - 7\,x + 4$. Determinare inoltre le coordinate dei punti di tangenza.*
Soluzione. La generica retta passante per P ha equazione $y + 3 = m(x-1)$; imponendo che il sistema

$$\begin{cases} y = 2\,x^2 - 7\,x + 4 \\ y + 3 = m(x-1) \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti ($\Delta = 0$ nell'equazione $2x^2 + x(-m-7) + m + 7 = 0$), si arriva alla condizione

$$m^2 + 6m - 7 = 0 \quad \text{da cui} \quad m_1 = -7 \;\; , \;\; m_2 = 1 \; .$$

Le rette tangenti richieste, pertanto, hanno equazioni $y = -7x + 4$, $y = x - 4$. Per determinare le coordinate dei punti di tangenza basta mettere a sistema ciascuna di queste equazioni con quella della parabola. Si ricavano così i punti $T_1(0, 4)$ e $T_2(2, -2)$.

Esercizio 10. *Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, avente vertice in $V(3, -2)$ e tangente alla retta $y = \dfrac{x}{2} + 3$. Si determini inoltre il punto di tangenza.*

Soluzione. Le parabole con asse parallelo all'asse delle y ed avente vertice in $V(3, -2)$ ha equazione $y + 2 = a(x-3)^2$; imponendo che il sistema

$$\begin{cases} y + 2 = a(x-3)^2 \\ y = \dfrac{x}{2} + 3 \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti, si arriva alla condizione $\left(-6a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4a(9a - 5) = 0$, da cui $a = -\dfrac{1}{104}$. La parabola ha pertanto equazione $y = -\dfrac{1}{104}x^2 + \dfrac{3}{52}x - \dfrac{217}{104}$. Il punto di tangenza è $T\left(-23, -\dfrac{17}{2}\right)$.

Esercizio 11. *Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, tangente alla retta $y = x - 2$ in $A(1, -1)$ e passante per $B(-2, 5)$.*

Soluzione. La parabola ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$; per imporre la tangenza con la retta $y = x - 2$, basta imporre che il sistema $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 2 \end{cases}$ abbia soluzioni coincidenti ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione $ax^2 + (b-1)x + c + 2 = 0$; si arriva così alla condizione $(b-1)^2 - 4a(c+2) = 0$. Imponendo anche il passaggio per i punti A e B si arriva al sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 5 \\ (b-1)^2 - 4a(c+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 - a - b \\ 4a - 2b - 1 - a - b = 5 \\ (b-1)^2 - 4a(-1 - a - b + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = -1 - a - b \\ 3a - 3b = 6 \\ (b-1)^2 + 4a(a + b - 1) = 0 \end{cases} ; \text{ ricavando } b \text{ e } c \text{ in funzione di } a, \text{ si ha}$$

$$\begin{cases} c = 1 - 2a \\ b = a - 2 \\ (a-3)^2 + 4a(2a - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ b = a - 2 \\ 9a^2 - 18a + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 1 - 2a \\ b = a - 2 \\ 9(a-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases} ;$$

la parabola ha quindi equazione $y = x^2 - x - 1$.

Esercizio 12. *Determinare le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse delle y, tangenti alla retta $y = 2x + 1$ e passanti per i punti $A(0, 2)$ e $B(-1, 3)$.*

Soluzione. La parabola ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$; per la tangenza con la retta $y = 2x + 1$, basta imporre che il sistema $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ abbia soluzioni coincidenti ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione $ax^2 + (b-2)x + c - 1 = 0$; si arriva così alla condizione $(b-2)^2 - 4a(c-1) = 0$. Imponendo anche il passaggio per i punti A e B si arriva al sistema

$$\begin{cases} c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ (b-2)^2 - 4a(c-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = a - 1 \\ (a-3)^2 - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = a - 1 \\ a^2 - 10a + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} c = 2 \\ b = 8 \\ a = 9 \end{cases} ;$$

le equazioni delle due parabole, quindi, sono: $y = x^2 + 2$ e $y = 9\,x^2 + 8\,x + 2$.

Esercizio 13. *Determinare le equazioni delle parabole aventi la retta $x = 1$ come asse di simmetria, tangenti alla retta $y = x - 2$ e passanti per $A(-2, 4)$.*
Soluzione. Per ragioni di simmetria, la parabola passa anche per il punto $A'(4, 4)$; si tratta quindi di determinare le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta $y = x - 2$ e passanti per $A(-2, 4)$ e $A'(4, 4)$. Come visto nell'esercizio precedente, si arriva al sistema

$$\begin{cases} 4\,a - 2\,b + c = 4 \\ 16\,a + 4\,b + c = 4 \\ (b-1)^2 - 4\,a(c+2) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a_1 = \frac{1}{18} \\ b_1 = -\frac{1}{9} \\ c_1 = \frac{32}{9} \end{cases}$$

le due parabole, pertanto, hanno le seguenti equazioni: $y = \dfrac{1}{2}\,x^2 - x$, $y = \dfrac{1}{18}\,x^2 - \dfrac{1}{9}\,x + \dfrac{32}{9}$.

Esercizio 14. *Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, tangente nell'origine alla retta $y = x$ e tangente ulteriormente alla retta $y = -x + 6$.*
Soluzione. Poiché la parabola passa per l'origine, risulta $c = 0$ e quindi la sua equazione è del tipo $y = a\,x^2 + b\,x$. Imponendo la tangenza con la retta $y = x$, si arriva alla condizione $(b-1)^2 = 0$, da cui $b = 1$. Per determinare a basta imporre la tangenza con la retta $y = -x + 6$: si trova $a = -\dfrac{1}{6}$. L'equazione della parabola, pertanto, è la seguente: $y = -\dfrac{1}{6}\,x^2 + x$.

Esercizio 15. *Determinare la parabola con asse parallelo all'asse delle y e tangente alle rette $y = x - 3$, $y = -3\,x + 5$, $y = 5\,x - 19$.*
Soluzione. Imponiamo le condizioni di tangenza alle tre rette:

$$\begin{cases} (b-1)^2 - 4\,a(c+3) = 0 \\ (b+3)^2 - 4\,a(c-5) = 0 \\ (b-5)^2 - 4\,a(c+19) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - 4\,a\,c - 12\,a = 0 \\ (b+3)^2 - 4\,a\,c + 20\,a = 0 \\ (b-5)^2 - 4\,a\,c - 76\,a = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4\,a\,c = (b-1)^2 - 12\,a \\ (b+3)^2 - (b-1)^2 + 12\,a + 20\,a = 0 \\ (b-5)^2 - (b-1)^2 + 12\,a - 76\,a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\,a\,c = (b-1)^2 - 12\,a \\ 4\,a + b + 1 = 0 \\ 8\,a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = \dfrac{(b-1)^2 - 12\,a}{4\,a} \\ a = 1 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

l'equazione della parabola, pertanto, è $y = x^2 - 5\,x + 6$.

Esercizio 16. *Determinare le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta $y = 5$ nel suo punto di ascissa -2 sapendo che la distanza del fuoco dalla direttrice è pari a 6.*
Soluzione. Le parabole hanno ovviamente vertice in $V(-2, 5)$; la loro equazione generale è $y - 5 = a(x+2)^2$, ovvero $y = a\,x^2 + 4\,a\,x + 4\,a + 5$. Dal momento che la distanza $\overline{VF}$ è pari a $6/2 = 3$, ci sono due possibili fuochi $F_{1;2} = (-2\,,\,5 \pm 3)$ e due rispettive direttrici $d_{1;2} : y = 5 \mp 3$. Le rispettive parabole hanno equazioni

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-8)^2} = |y-2| \;\Rightarrow\; y = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{16}{3}$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = |y-8| \;\Rightarrow\; y = -\frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} + \frac{14}{3}\,.$$

Esercizio 17. *Determinare le equazioni delle rette tangenti comuni alle parabole* $y = x^2 - 4x + 6$ *e* $y = -2x^2 + 2x - 3$.

Soluzione. Cerchiamo m e q in modo che i due sistemi

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 6 \\ y = mx + q \end{cases} , \begin{cases} y = -2x^2 + 2x - 3 \\ y = mx + q \end{cases}$$

abbiano ciascuno soluzioni coincidenti; si arriva dunque alle condizioni

$$\begin{cases} (m+4)^2 - 4(6-q) = 0 \\ (m-2)^2 - 8(3+q) = 0 \end{cases}$$

il sistema ammette le soluzioni $\begin{cases} m_1 = 2 \\ q_1 = -3 \end{cases}$ e $\begin{cases} m_2 = -6 \\ q_2 = 5 \end{cases}$. Le rette tangenti comuni, pertanto, hanno equazioni $y = 2x - 3$ e $y = -6x + 5$.

Esercizio 18. *Determinare la retta parallela alla retta* $4x - 2y + 7 = 0$ *e tangente alla parabola* $y = 3x^2 - x + 4$.

Soluzione. La generica retta parallela alla retta $4x - 2y + 7 = 0$ ha equazione $y = 2x + k$; per imporre la tangenza con la parabola basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - x + 4 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti. Si arriva alla condizione $9 - 12(4-k) = 0$, da cui $k = \dfrac{13}{4}$. La retta tangente ha quindi equazione $y = 2x + \dfrac{13}{4}$.

Esercizio 19. *Determinare il punto della parabola* $y = x^2$ *più vicino alla retta* $r : y = 3x - 7$.

Soluzione. Per risolvere l'esercizio basta determinare la retta parallela alla retta r e tangente alla parabola: il punto T di tangenza è il punto richiesto. La generica retta parallela ad r ha equazione del tipo $y = 3x + k$, per cui dobbiamo far sì che il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + k \end{cases}$$

abbia due soluzioni coincidenti: si trova $k = -\dfrac{9}{4}$. La retta tangente ha equazione $y = 3x - \dfrac{9}{4}$ ed il punto di tangenza ha coordinate $T\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$.

Esercizio 20. *Determinare l'equazione della retta* r*, parallela all'asse delle* x*, tale che la corda staccata su* r *dalla parabola* $y = x^2 - 2x + 3$ *abbia una lunghezza uguale a* 5.

Soluzione. Una retta parallela all'asse delle x ha equazione $y = k$, per cui le coordinate dei punti di intersezione tra la parabola e la retta si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = k \end{cases} .$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{k-2} \\ y_1 = k \end{cases} , \begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{k-2} \\ y_2 = k \end{cases} ;$$

imponendo che la corda abbia lunghezza pari a 5, si ha

$$|x_1 - x_2| = 5 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{k-2} = 5 \;\Rightarrow\; k = \frac{33}{4} ;$$

la retta richiesta ha pertanto equazione $y = \dfrac{33}{4}$.

Esercizio 21. *Dimostrare che i punti medi delle corde staccate dalla parabola* $y = x^2 + 4x + 5$ *sulle rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante appartengono ad una retta parallela all'asse delle* y*.*
Soluzione. Le rette parallele hanno equazione $y = x + k$; le coordinate degli estremi delle corde si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 5 \\ y = x + k \end{cases} ;$$

le soluzioni del sistema, per $k \geq \dfrac{11}{4}$, sono:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{4k - 11}}{2} \\ y_1 = \dfrac{2k - 3 - \sqrt{4k - 11}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{4k - 11}}{2} \\ y_2 = \dfrac{2k - 3 + \sqrt{4k - 11}}{2} \end{cases} ;$$

per ogni $k \geq \dfrac{11}{4}$ il punto medio della corda è

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{2k - 3}{2}\right) \quad \text{con } k \geq \frac{11}{4} .$$

I punti medi delle corde appartengono dunque alla retta $x = -\dfrac{3}{2}$, parallela all'asse y.

Esercizio 22. *Dimostrare che la retta tangente alla parabola* $y = ax^2 + bx + c$ *nel suo punto di ascissa* x_0 *ha coefficiente angolare pari a* $2ax_0 + b$*.*
Soluzione. Il punto P di ascissa x_0 ha coordinate $P(x_0\,, ax_0^2 + bx_0 + c)$; la retta generica passante per P è $y = m(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c$. Il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ ax^2 + (b - m)x + (mx_0 - ax_0^2 - bx_0) = 0 \end{cases}$$

deve avere due soluzioni coincidenti: si arriva così alla condizione $(b - m)^2 - 4a(mx_0 - ax_0^2 - bx_0) = 0$, che può essere riscritta così:

$$4a^2 x_0^2 + b^2 + m^2 + 4abx_0 - 4ax_0 m - 2bm = 0 \quad \Rightarrow \quad (2ax_0 + b - m)^2 = 0$$

risolvendo l'ultima equazione rispetto ad m si trova $m = 2ax_0 + b$.

Possiamo ritrovare lo stesso risultato osservando che l'equazione $ax^2 + (b - m)x + (mx_0 - ax_0^2 - bx_0) = 0$ è risolta per x_0 e, affinché la retta risulti tangente alla parabola, anche l'altra soluzione deve coincidere con x_0; la somma delle soluzioni deve perciò essere pari a $2x_0$. Ricordando le relazioni fra la somma delle soluzioni di un'equazione di secondo grado ed i suoi coefficienti, si ha:

$$-\frac{b - m}{a} = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad m = 2ax_0 + b .$$

Esercizio 23. *Dimostrare che le tangenti alla parabola* $y = x^2 + 2x + \dfrac{5}{4}$*, condotte da un punto della direttrice, sono perpendicolari.*
Soluzione. La direttrice coincide con l'asse delle x, quindi il punto generico da cui partono le tangenti è $P(t, 0)$. La generica retta passante per P ha equazione $y = m(x - t)$, quindi basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + \dfrac{5}{4} \\ y = m(x - t) \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti. Si arriva alla condizione $(2 - m)^2 - 4\left(\dfrac{5}{4} + mt\right) = 0$, da cui

$$m_1 = 2t + 2 + \sqrt{4t^2 + 8t + 5} \;,\; m_2 = 2t + 2 - \sqrt{4t^2 + 8t + 5}$$

moltiplicando questi due coefficienti angolari si trova

$$\left(2\,t+2+\sqrt{4\,t^2+8\,t+5}\right)\cdot\left(2\,t+2-\sqrt{4\,t^2+8\,t+5}\right)=-1$$

le due rette tangenti sono dunque perpendicolari.

Esercizio 24. *Determinare le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse y, aventi fuoco in $F(2,1)$ e tangenti alla retta $y=2\,x-8$.*
Soluzione. Primo metodo. La direttrice ha equazione $y=k$ (con $k\neq 1$), quindi la parabola ha equazione

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|y-k| \;\Rightarrow\; y=\frac{x^2-4\,x+5-k^2}{2\,(1-k)}\quad,\quad k\neq 1\;;$$

la tangenza alla retta $y=2\,x-8$ viene garantita se il sistema

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-4\,x+5-k^2}{2\,(1-k)} \\ y=2\,x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+(4\,k-8)x+21-16\,k-k^2}{2\,(1-k)}=0 \\ y=2\,x-8 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti: ciò accade se e solo se $(4\,k-8)^2-4\,(21-16\,k-k^2)=0$ (con $k\neq 1$): risolvendo si trova $k=-1$ (l'altra soluzione va scartata). La direttrice ha pertanto equazione $y=-1$ e la parabola ha equazione $y=\dfrac{1}{4}\,x^2-x+1$.

Secondo metodo. Dato che il fuoco è $F(2,1)$, si ha $x_F=-\frac{b}{2\,a}=2$, $y_F=\frac{1-\Delta}{4\,a}=1$; la tangenza alla retta $y=2\,x-8$ porta alla condizione $(b-2)^2-4\,a(c+8)=0$; mettendo assieme queste tre condizioni si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2\,a}=2 \\ \dfrac{1-(b^2-4\,ac)}{4\,a}=1 \\ (b-2)^2-4\,a(c+8)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4\,a \\ b^2-4\,ac=1-4\,a \\ b^2-4\,ac-32\,a-4\,b+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4\,a \\ b^2-4\,ac=1-4\,a \\ -36\,a-4\,b+5=0 \end{cases}$$

che è risolto per $a=\dfrac{1}{4}$, $b=-1$, $c=1$; si ritrova così l'equazione $y=\dfrac{1}{4}\,x^2-x+1$.

Esercizio 25. *Determinare l'equazione della parabola avente come direttrice l'asse x e tangente nel punto $P(1,1)$ alla retta $r: x+y-2=0$.*
Soluzione. Primo metodo. Indicato con $F(t,k)$ (con $k\neq 0$) il fuoco, poiché il punto $P(1,1)$ appartiene alla parabola, si ha

$$\sqrt{(1-t)^2+(1-k)^2}=1 \;\Rightarrow\; (1-t)^2+(1-k)^2=1\;;$$

per determinare la tangenza alla retta r, scriviamo per prima cosa l'equazione della parabola

$$\sqrt{(x-t)^2+(y-k)^2}=|y| \;\Rightarrow\; y=\frac{x^2-2\,t\,x+t^2+k^2}{2\,k}\;;$$

e successivamente imponiamo che il sistema

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-2\,t\,x+t^2+k^2}{2\,k} \\ y=-x+2 \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti: si arriva alla condizione $16\,k-8\,k\,t=0$.

In definitiva, per risolvere l'esercizio, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} (1-t)^2+(1-k)^2=1 \\ 16\,k-8\,k\,t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-t)^2+(1-k)^2=1 \\ 8\,k\,(2-t)=0 \end{cases}\;;$$

le soluzioni sono $\begin{cases} t_1 = 1 \\ k_1 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} t_2 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$. La prima soluzione va scartata (il fuoco non deve appartenere alla direttrice), mentre la seconda fornisce le coordinate del fuoco della parabola che risolve l'esercizio:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y| \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x + \frac{5}{2}\,.$$

Secondo metodo. Imponendo il passaggio per P e la tangenza alla retta r si ottiene:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ (b+1)^2 - 4\,a(c-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1-a-b \\ (b+1)^2 - 4\,a(1-a-b-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1-a-b \\ (2\,a+b+1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1-a-b \\ b = -2\,a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a+2 \\ b = -2\,a-1 \end{cases}$$

quindi l'equazione generale della parabola è

$$y = a\,x^2 + (-2\,a-1)\,x + a + 2\,;$$

la direttrice in funzione di $a \neq 0$ ha equazione $y = \dfrac{-1 - \big((-2\,a-1)^2 - 4\,a(a+2)\big)}{4\,a} \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \dfrac{1}{2\,a}$; affinché tale retta coincida con l'asse x ($y=0$), deve essere

$$1 - \frac{1}{2\,a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\,;$$

sostituendo tale valore nell'equazione generale si ritrova il risultato visto nel primo metodo.

Esercizio 26. *Determinare l'equazione della parabola avente come direttrice la retta $y = -1$, come asse di simmetria la retta $x = 2$ e tangente alla retta $y = -2\,x$.*

<u>Soluzione.</u> Il fuoco della parabola è $F(2\,,\,k)$, con $k \neq -1$, quindi l'equazione della parabola è

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-k)^2} = |y+1| \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2 - 4\,x + 3 + k^2}{2(k+1)} \quad \text{con} \quad k \neq -1\,;$$

per la tangenza con la retta $y = -2\,x$ dobbiamo imporre che il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4\,x + 3 + k^2}{2(k+1)} \\ y = -2\,x \end{cases}$$

abbia due soluzioni coincidenti; si arriva alla condizione

$$12\,k^2 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 1\,,\; k_2 = -1\,;$$

il secondo valore non è accettabile, mentre con l'altro si ottiene l'equazione della parabola: $y = \dfrac{1}{4}\,x^2 - x + 1$.

Esercizio 27. *Determinare l'equazione della parabola avente come direttrice la retta $y = -1$, come asse di simmetria la retta $x = 2$ e tangente alla retta $y = -x + 1$.*

<u>Soluzione.</u> Il fuoco della parabola è $F(2\,,\,k)$, con $k \neq -1$, quindi l'equazione della parabola è

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-k)^2} = |y+1| \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2 - 4\,x + 3 + k^2}{2(k+1)} \quad \text{con} \quad k \neq -1\,;$$

mettendo a sistema la parabola con la retta $y = -x + 1$ si ha

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4\,x + 3 + k^2}{2(k+1)} \\ y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+k-1)^2}{2(k+1)} = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

per ogni $k \neq -1$ il sistema ha due soluzioni coincidenti, quindi ci sono infinite parabole che risolvono l'esercizio: tutte quelle del tipo

$$y = \frac{x^2 - 4\,x + 3 + k^2}{2(k+1)} \quad \text{con} \quad k \neq -1\,.$$

Esercizio 28. *Determinare l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse y e passanti per i punti $A(-1,-2)$ e $B(4,3)$. Tra queste determinare:*
a) la parabola passante per $C(3,-3)$;
b) la parabola passante per $D(2,1)$;
c) le parabole tangenti alla retta $y = 2x + 4$;
d) le parabole tangenti alla retta $y = x$;
e) le parabole aventi il vertice sulla retta $y = -4x + \frac{46}{3}$;
f) le parabole aventi il fuoco sulla retta $y = 2x - \frac{25}{4}$;
g) le parabole aventi come direttrice la retta $y = -\frac{25}{4}$.

Soluzione. Imponendo il passaggio per A e B si ottiene

$$\begin{cases} a-b+c=-2 \\ 16a+4b+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-a+b-2 \\ 16a+4b-a+b-2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c=-a+b-2 \\ 15a+5b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-4a-1 \\ b=1-3a \end{cases}$$

l'equazione cercata, pertanto è la seguente:

$$y = a\,x^2 + (1-3a)x - 4a - 1\ .$$

a) Basta sostituire nell'equazione generale $x = 3$, $y = -3$:

$$-3 = 9a + (1-3a)\cdot 3 - 4a - 1 \ \Rightarrow\ -3 = -4a + 2 \ \Rightarrow\ a = \frac{5}{4} \quad \text{da cui} \quad y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{11}{4}x - 6\ .$$

b) Ripetendo lo stesso procedimento con $x = 2$, $y = 1$, si arriva all'equazione

$$1 = 4a + (1-3a)\cdot 2 - 4a - 1 \ \Rightarrow\ -6a = 0 \ \Rightarrow\ a = 0\ ;$$

in questo caso non si ottiene una parabola, bensì la retta $y = x - 1$: ciò è dovuto al fatto che il punto D si trova sulla retta passante per A e B.
c) Imponendo che il sistema

$$\begin{cases} y = a\,x^2 + (1-3a)x - 4a - 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti, si trova

$$(-1-3a)^2 - 4a(-4a-5) = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = -1\ ;\ a_2 = -\frac{1}{25}\ ;$$

le corrispondenti equazioni sono $y = -x^2 + 4x + 3$, $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{28}{25}x - \frac{21}{25}$.
d) Imponendo che il sistema

$$\begin{cases} y = a\,x^2 + (1-3a)x - 4a - 1 \\ y = x \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti, si trova

$$(-3a)^2 - 4a(-4a-1) = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = 0\ ;\ a_2 = -\frac{4}{25}\ ;$$

il primo valore non è accettabile (si hanno parabole se e solo se $a \neq 0$), quindi esiste una sola parabola con le proprietà richieste: $y = -\frac{4}{25}x^2 + \frac{37}{25}x - \frac{9}{25}$.

e) Il vertice della generica parabola è

$$V\left(\frac{3\,a-1}{2\,a}\,,\,-\frac{(1-3\,a)^2-4\,a(-4\,a-1)}{4\,a}\right)\;\Rightarrow\;V\left(\frac{3\,a-1}{2\,a}\,,\,\frac{2\,a-25\,a^2-1}{4\,a}\right)\;;$$

affinchè V appartenga alla retta $y=-4\,x+\dfrac{46}{3}$, deve essere

$$\frac{2\,a-25\,a^2-1}{4\,a}=-4\cdot\frac{3\,a-1}{2\,a}+\frac{46}{3}\quad\Rightarrow\quad a_1=-\frac{1}{3}\;,\;a_2=-\frac{27}{25}\;;$$

le corrispondenti equazioni sono: $y=-\dfrac{1}{3}\,x^2+2\,x+\dfrac{1}{3}\;,\;y=-\dfrac{27}{25}\,x^2+\dfrac{106}{25}\,x+\dfrac{83}{25}$.

f) Il fuoco della generica parabola è $F\left(\dfrac{3\,a-1}{2\,a}\,,\,\dfrac{1-(1-3\,a)^2+4\,a(-4\,a-1)}{4\,a}\right)$; affinché F appartenga alla retta $y=2\,x-\dfrac{25}{4}$, deve essere

$$\frac{1-(1-3\,a)^2+4\,a(-4\,a-1)}{4\,a}=2\cdot\frac{3\,a-1}{2\,a}-\frac{25}{4}\quad\Rightarrow\quad a_1=-\frac{1}{5}\;,\;a_2=\frac{4}{5}\;;$$

le corrispondenti equazioni sono: $y=-\dfrac{1}{5}\,x^2+\dfrac{8}{5}\,x-\dfrac{1}{5}\;,\;y=\dfrac{4}{5}\,x^2-\dfrac{7}{5}\,x-\dfrac{21}{5}$.

g) La direttrice della generica parabola ha equazione $y=\dfrac{-1-(1-3\,a)^2+4\,a(-4\,a-1)}{4\,a}$, quindi coincide con la retta $y=-\dfrac{25}{4}$ se e solo se

$$\frac{-1-(1-3\,a)^2+4\,a(-4\,a-1)}{4\,a}=-\frac{25}{4}\quad\Rightarrow\quad a_1=1\;,\;a_2=\frac{2}{25}\;;$$

le corrispondenti equazioni sono: $y=x^2-2\,x-5\;,\;y=\dfrac{2}{25}\,x^2+\dfrac{19}{25}\,x-\dfrac{33}{25}$.

Esercizio 29. *Determinare l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse y e tangenti alla retta $y=x-3$ nel punto $A(1,-2)$. Tra queste determinare:*
a) la parabola passante per $B(2,3)$;
b) le parabole tangenti alla retta $y=-3\,x+5$;
c) le parabole simmetriche rispetto alla retta $x=-2$.

Soluzione. Imponendo il passaggio per A e la tangenza alla retta $y=x-3$, si ottiene

$$\begin{cases}a+b+c=-2\\(b-1)^2-4\,a(c+3)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c=-2-a-b\\(b-1)^2-4\,a(-2-a-b+3)=0\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}c=-2-a-b\\4\,a^2+b^2+1+4\,ab-4\,a-2\,b=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c=-2-a-b\\(2\,a+b-1)^2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c=a-3\\b=1-2\,a\end{cases}$$

l'equazione della generica parabola, pertanto, è

$$y=a\,x^2+(1-2\,a)x+a-3\,.$$

a) Imponendo il passaggio per $B(2,3)$ si ha:

$$3=a\cdot 2^2+(1-2\,a)\cdot 2+a-3\quad\Rightarrow\quad a=4$$

l'equazione della parabola corrispondente è $y=4\,x^2-7\,x+1$.

b) Imponiamo che il sistema

$$\begin{cases}y=a\,x^2+(1-2\,a)x+a-3\\y=-3\,x+5\end{cases}$$

abbia due soluzioni coincidenti; il Δ dell'equazione risolvente è $\Delta = 16\,(a+1)$, per cui il valore che vogliamo è $a = -1$; l'equazione della parabola corrispondente è $y = -x^2 + 3\,x - 4$.
c) La parabola è simmetrica rispetto alla retta $x = -2$ se e solo se

$$x_V = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,a - 1}{2\,a} = -2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{6}\ ;$$

l'equazione della corrispondente parabola è $y = \frac{1}{6}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x - \frac{17}{6}$.

Esercizio 30. *Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse x e passanti per i punti $A(-1,-3)$ e $B(2,-6)$.*
Soluzione. I centri delle circonferenze si trovano sulle parabole p_1 e p_2, entrambe aventi l'asse x come direttrice e fuoco rispettivamente in A e B; per determinare le loro coordinate è sufficiente risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} = |y| \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y+6)^2} = |y| \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{12}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x - \frac{10}{3} \end{cases}$ si trovano così i centri $C_1(2\,,\,-3)$ e $C_2(-10\,,\,-15)$. Le equazioni delle circonferenze, pertanto, sono le seguenti:
$\gamma_1 : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$; $\gamma_2 : (x+10)^2 + (y+15)^2 = 225$.

Esercizio 31. *Determinare il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti alla retta $r : y = 5$ e tangenti esternamente alla circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 - 6\,x + 2\,y - 6 = 0$.*
Soluzione. La circonferenza ha centro in $C(3,-1)$ e raggio 4. Il luogo geometrico richiesto è costituito dai punti $P(x,y)$ tali che

$$\overline{PC} - 4 = d(P,r) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} - 4 = |y-5|$$

svolgendo i calcoli si trova l'equazione cartesiana del luogo: $y = -\frac{1}{20}\,x^2 + \frac{3}{10}\,x + \frac{71}{20}$.

Esercizio 32. *Determinare il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti alla retta $r : y = 5$ e tangenti internamente alla circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 - 6\,x + 2\,y - 6 = 0$.*
Soluzione. La circonferenza ha centro in $C(3,-1)$ e raggio 4. Il luogo geometrico richiesto è costituito dai punti $P(x,y)$ tali che

$$\overline{PC} + 4 = d(P,r) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + 4 = |y-5|$$

svolgendo i calcoli si trova l'equazione cartesiana del luogo: $y = -\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x - \frac{9}{4}$.

Esercizio 33. *Determinare il luogo geometrico dei punti medi delle corde staccate sulla parabola $y = x^2 - 4\,x + 5$ dal fascio di rette avente centro nel punto $V(1,-1)$.*
Soluzione. La generica retta per $V(1,-1)$ ha equazione $y + 1 = m(x-1)$, per determinare le coordinate dei punti di intersezione con la parabola dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4\,x + 5 \\ y + 1 = m(x-1) \end{cases} \quad ;$$

i punti di intersezione, per $m \leq -2 - 2\sqrt{3} \cup m \geq -2 + 2\sqrt{3}$, sono:

$$A\left(\frac{m + 4 + \sqrt{m^2 + 4\,m - 8}}{2}\,,\,\frac{m^2 + 2\,m - 2 + m\sqrt{m^2 + 4\,m - 8}}{2}\right)\ ,$$

$$B\left(\frac{m + 4 - \sqrt{m^2 + 4\,m - 8}}{2}\,,\,\frac{m^2 + 2\,m - 2 - m\sqrt{m^2 + 4\,m - 8}}{2}\right)\ .$$

Il punto medio M del segmento AB ha coordinate

$$M\left(\frac{m+4}{2}\,,\,\frac{m^2+2\,m-2}{2}\right) \qquad \text{con } \; m \le -2-2\sqrt{3} \cup m \ge -2+2\sqrt{3}$$

quindi il luogo geometrico ammette le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{2}+2 \\[2ex] y = \dfrac{m^2}{2}+m-1 \end{cases} \qquad \text{con } \; m \le -2-2\sqrt{3} \cup m \ge -2+2\sqrt{3}\,;$$

ricavando m dalla prima equazione e sostituendo nell'altra si ottiene l'equazione cartesiana del luogo richiesto:

$$y = 2\,x^2-6\,x+3 \quad \text{con } \; x \le 1-\sqrt{3} \cup x \ge 1+\sqrt{3}\,.$$

Esercizio 34. *Data una parabola p di asse a, si considerino le intersezioni Q e S della retta tangente in $P \in p$ rispettivamente con l'asse a e con la tangente nel vertice. Dimostrare che S è il punto medio del segmento di estremi P e Q.*
Soluzione. Senza alcuna perdita di generalità, possiamo considerare la parabola $y = a\,x^2$; la retta tangente nel generico punto $P(t\,,\,a\,t^2)$ ha equazione $y = 2\,a\,t(x-t)+a\,t^2$ ed incontra l'asse y (asse della parabola) in $Q(0\,,\,-a\,t^2)$ e l'asse x (tangente nel vertice) in $S\left(\frac{t}{2}\,,\,0\right)$. Non è difficile verificare che S è il punto medio di PQ:

$$x_S = \frac{t+0}{2} = \frac{t}{2} \;\; ; \;\; y_S = \frac{a\,t^2-a\,t^2}{2} = 0\,.$$

Esercizio 35. *Scrivere l'equazione generale delle parabole con asse parallelo all'asse y e tangenti alle rette $y = x$ e $y = -2\,x+3$. Si determini il luogo geometrico dei fuochi di tali parabole.*
Soluzione. Partendo dall'equazione $y = a\,x^2+b\,x+c$, imponendo la tangenza alle rette si ottiene

$$\begin{cases} (b-1)^2-4\,a\,c = 0 \\ (b+2)^2-4\,a\,(c-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\,ac = (b-1)^2 \\ (b+2)^2-4\,a\,c+12\,a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\,ac = (b-1)^2 \\ (b+2)^2-(b-1)^2+12\,a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\,ac = (b-1)^2 \\[1ex] b = -2\,a-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{(4\,a+3)^2}{16\,a} \\[2ex] b = -2\,a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

l'equazione generale delle parabole con le proprietà descritte è

$$y = a\,x^2+\left(-2\,a-\frac{1}{2}\right)x+\frac{(4\,a+3)^2}{16\,a}\,.$$

Il fuoco della generica parabola ha coordinate

$$F\left(\frac{4\,a+1}{4\,a}\,,\,\frac{4\,a+3}{4\,a}\right) \quad \text{con } \; a \ne 0\,;$$

il luogo geometrico dei fuochi può essere scritto in equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4\,a+1}{4\,a} \\[2ex] y = \dfrac{4\,a+3}{4\,a} \end{cases} \quad \text{con } \; a \ne 0\,;$$

ricavando a dalla prima equazione e sostituendo nell'altra si ottiene l'equazione cartesiana del luogo richiesto:

$$y = 3\,x-2 \quad \text{con } \; x \ne 1\,.$$

Esercizio 36. *Si considerino il punto $F(0,k)$ con $-1 < k < 1$ e le rette $y = -1$ e $y = 1$. Sia p_1 la parabola di fuoco F e direttrice $y = -1$ e p_2 la parabola di fuoco F e direttrice $y = 1$. Si dimostri che le parabole p_1 e p_2 si "tagliano" ortogonalmente.*

<u>**Soluzione.**</u> Le parabole p_1 e p_2 hanno equazioni

$$p_1 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-k)^2} = |y+1| \quad \Rightarrow \quad p_1 : y = \frac{x^2 + k^2 - 1}{2(k+1)}$$

$$p_2 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-k)^2} = |y-1| \quad \Rightarrow \quad p_2 : y = \frac{x^2 + k^2 - 1}{2(k-1)}$$

determiniamo ora le coordinate dei punti di intersezione delle due parabole risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + k^2 - 1}{2(k+1)} \\ y = \dfrac{x^2 + k^2 - 1}{2(k-1)} \end{cases} \Rightarrow A : \begin{cases} x = -\sqrt{1-k^2} \\ y = 0 \end{cases} \cup \quad B : \begin{cases} x = \sqrt{1-k^2} \\ y = 0 \end{cases} .$$

Le pendenze delle rette tangenti in tali punti si ottengono ricordando la formula $m = 2\,a\,x_0 + b$;

$$m_{p_1,A} = 2 \cdot \frac{1}{2(k+1)} \cdot (-\sqrt{1-k^2}) + 0 = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k} ;$$

$$m_{p_2,A} = 2 \cdot \frac{1}{2(k-1)} \cdot (-\sqrt{1-k^2}) + 0 = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k}$$

moltiplicando le due pendenze si ha:

$$m_{p_1,A} \cdot m_{p_2,A} = \left(-\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k}\right) = -\frac{1-k^2}{1-k^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{le rette sono perpendicolari.}$$

Si procede in modo del tutto analogo per il punto B (ma possiamo anche evitare di fare i calcoli, dal momento che si tratta di due parabole simmetriche rispetto all'asse y).