

## Esercizi sullo studio di una funzione

**3<sup>a</sup> A Classico 21/05/2012**

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x+k}$$

si determini il valore del parametro  $k$  in modo che la derivata prima di  $f(x)$  si annulli in  $x = 6$ . Si studi la funzione ottenuta.

(Suggerimento: si calcoli la derivata prima della funzione assegnata e si sostituisca 6 al posto della  $x$ . Risolvendo l'equazione  $f'(x) = 0$  si ricava il valore di  $k$ ).

R.  $k = -4$

**Esercizio 2.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + kx + 1}$$

si determini  $k$  in modo tale che  $f(x)$  abbia come asintoto obliquo la retta di equazione cartesiana  $y = x - 2$ . Si studi la funzione ottenuta.

(Suggerimento: dato che la funzione è razionale fratta, è sufficiente eseguire la divisione polinomiale ed imporre che il quoziente risulti uguale a  $x - 2$ ).

R.  $k = 2$

**Esercizio 3.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x+k}{x^2+1}$$

si determini  $k$  in modo tale che  $f(x)$  abbia un flesso nel punto di ascissa 1. Studiare la funzione ottenuta determinando in particolare gli altri punti di flesso.

(Suggerimento: si calcoli la derivata seconda della funzione assegnata e si sostituisca 1 al posto della  $x$ . Risolvendo l'equazione  $f''(x) = 0$  si ricava il valore di  $k$ . Per essere certi che si tratta davvero di un flesso possiamo studiare il segno della derivata seconda...).

R.  $k = 1$

**Esercizio 4.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x + a}{x + b}$$

determinare i valori di  $a$  e  $b$  in modo tale che il grafico della funzione passi per il punto  $(3, 2)$  ed abbia un massimo relativo nel suo punto di ascissa  $-3$ .

(Suggerimento: il passaggio per il punto  $(3, 2)$  si impone sostituendo 3 al posto della  $x$  e 2 al posto della  $y$ . Successivamente basta risolvere il sistema rispetto ad  $a$  e  $b$ . Per essere certi che nel punto  $x = -3$  la funzione ha davvero un massimo relativo possiamo studiare il segno della derivata prima...).

R.  $a = 2, b = 1$ .

## Esercizi sullo studio di una funzione

Il numero di asterischi indica la difficoltà degli esercizi.

**Esercizio 1.** (\*) Classificare i punti di discontinuità della funzione  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ -4 & \text{se } x = 2 \\ 7 - x & \text{se } x > 2. \end{cases}$

**Esercizio 2.** (\*) Dire se la funzione  $f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$  è derivabile in  $x_0 = 2$ .

Studiare le seguenti funzioni:

**Esercizio 3.** (\*)  $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1973 - Italia).

**Esercizio 4.** (\*)  $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1971 - Italia)

**Esercizio 5.** (\*)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1998 - Italia)

**Esercizio 6.** (\*)  $f(x) = \frac{x - 2x^2}{2x + 1}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1973 - Italia).

**Esercizio 7.** (\*)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1973 - Italia).

**Esercizio 8.** (\*)  $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1978 - Italia).

**Esercizio 9.** (\*)  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{3x}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1979 - Italia)

**Esercizio 10.** (\*)  $f(x) = \frac{x - x^2}{1 - 2x}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1979 - Scuole italiane all'estero)

**Esercizio 11.** (\*)  $f(x) = \frac{6x^2 + 2x + 3}{4x^2 + 2}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1980 - Italia).

**Esercizio 12.** (\*)  $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2}$  ;  $F(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1988 - Italia).

**Esercizio 13.** (\*)  $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1980 - Scuole italiane all'estero - II gruppo).

**Esercizio 14.** (\*)  $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1982 - Italia).

**Esercizio 15.** (\*\*)  $f(x) = \frac{2x - 1}{2x^3}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1976 - Italia).

**Esercizio 16.** (\*\*)  $f(x) = \frac{x - 1}{x^3}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1977 - Scuole italiane a Buenos Aires).

**Esercizio 17.** (\*\*)  $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{x^2}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1978 - Scuole italiane all'estero).

**Esercizio 18.** (\*\*)  $f(x) = \frac{4}{x^2} - x$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1978 - Scuole italiane a Buenos Aires).

**Esercizio 19.** (\*\*)  $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^3}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1996 - Italia).

**Esercizio 20.** (\*\*)  $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1979 - Italia).

**Esercizio 21.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1977 - Scuole italiane all'estero).

**Esercizio 22.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1974 - Italia).

**Esercizio 23.** (\*\*\*)  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1979 - Italia).

**Esercizio 24.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{x^4 + 16}{x^2}$  (sess. ord. della Maturità scient. 1981 - Italia).

**Esercizio 25.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1977 - Italia). Suggerimento: il numeratore si scompone in  $(x - 2)^2(x + 1)$ .

**Esercizio 26.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x^3 - 1}{3x^2}$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1978 - Italia). Suggerimento: il numeratore si scompone in  $-(x - 1)^2(2x + 1)$ .

**Esercizio 27.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$ . Si verifichi che i tre flessi del grafico di  $f$  sono allineati e si scriva l'equazione della retta congiungente (sess. ord. della Maturità scient. 1983 - Scuole italiane a Buenos Aires).

**Esercizio 28.** (\*\*\*)  $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$ . Si verifichi che i tre flessi del grafico di  $f$  sono allineati e si scriva l'equazione della retta congiungente (sess. suppl. della Maturità scient. 1983 - Scuole italiane all'estero - I gruppo)

Negli esercizi che seguono si richiede di determinare la funzione avente le proprietà descritte.

**Esercizio 29.** (\*) Si determinino i coefficienti  $a, b, c$  in maniera che il grafico della funzione  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^2 + c}$  passi per i punti  $(1, 1), (0, 3), (3, -3)$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1983 - Scuole italiane a Buenos Aires). Sol.  $a = -5, b = 9, c = 3$ .

**Esercizio 30.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b$  in modo tale che il grafico della funzione  $f(x) = a - x + \frac{b}{x^2}$  sia tangente all'asse delle ascisse nel punto  $A(1, 0)$ . (sess. ord. della Maturità scient. 1982 - Scuole italiane a Buenos Aires). Sol.  $a = 3/2, b = -1/2$ .

**Esercizio 31.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b$  sapendo che il grafico della funzione  $f(x) = x + a + \frac{b}{x^2}$  ha un minimo relativo nel punto  $(2, 0)$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1981 - Scuole italiane all'estero - II gruppo). Sol.  $a = -3, b = 4$ .

**Esercizio 32.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b$  in modo tale che la funzione  $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^3}$  abbia gli estremi relativi nei punti  $A$  e  $B$  di ascisse 1 e 3 rispettivamente (sess. suppl. della Maturità scient. 1996 - Italia). Sol.  $a = -4, b = 2$ .

**Esercizio 33.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b$  in modo tale che la funzione  $f(x) = \frac{x^3}{ax + b}$  abbia un estremo relativo nel punto di coordinate  $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$  (sess. ord. della Maturità scient. 1999 - Italia). Sol.  $a = 2, b = -1$ .

**Esercizio 34.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b, c$  in modo tale che il grafico della funzione  $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2}$  passi per i punti  $A(-1, 0), B(1, 2)$  e sia tangente all'asse delle  $x$  in un punto  $C$ . (sess. suppl. della Maturità scient. 1982 - Scuole italiane all'estero). Sol.  $a = 1, b = -3, c = 4$ .

**Esercizio 35.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b, c, d$  in modo tale che la funzione  $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$  ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione  $y = x - 2$ , abbia un estremo relativo nel punto di ascissa  $x = 2$  ed un flesso nel punto di ascissa  $x = -1$  (sess. suppl. della Maturità scient. 1981 - Italia). Sol.  $a = 1, b = -2, c = 3, d = 1$ .

**Esercizio 36.** (\*\*\*) Si determinino i coefficienti  $a, b$  in modo tale che la funzione  $f(x) = \frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$  soddisfi alle seguenti condizioni: intersechi la retta  $y = 1$  in due punti e sia tangente ad essa in un punto; sia tangente all'asse  $x$  in due punti distinti (sess. ordinaria della Maturità scient. 1997 - Italia). Suggerimento: si tenga conto del fatto che  $f(x)$  è pari. Sol.  $a = -2, b = 1$ .