

## Esercizi svolti sulle equazioni di secondo grado

**Esercizio 1.** Risolvere l'equazione  $x^2 - 4x - 7 = 0$ .

**Soluzione.**

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 16 + 28 = 44 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{11}}{2} \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{aligned} x_1 &= \frac{4 + 2\sqrt{11}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{11})}{2} = 2 + \sqrt{11} \\ x_2 &= \frac{4 - 2\sqrt{11}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{11})}{2} = 2 - \sqrt{11} \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Risolvere l'equazione  $-2x^2 + 5x + 2 = 0$ .

**Soluzione.**

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25 + 16 = 41 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{-4} \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{aligned} x_1 &= \frac{-5 + \sqrt{41}}{-4} = \frac{5 - \sqrt{41}}{4} \\ x_2 &= \frac{-5 - \sqrt{41}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Risolvere l'equazione  $\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{6} = 0$ .

**Soluzione.** Moltiplico tutto per 12 :

$$12 \cdot \left( \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{6} \right) = 12 \cdot 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 14 = 0 ;$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -12 \\ c = 14 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 14 = 144 - 168 = -24 < 0 \Rightarrow \text{nessuna soluzione .}$$

**Esercizio 4.** Risolvere l'equazione  $-2x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{3} = 0$ .

**Soluzione.** Moltiplico tutto per 6 :

$$6 \cdot \left(-2x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}\right) = 6 \cdot 0 \Rightarrow -12x^2 + 15x + 4 = 0;$$

$$\begin{cases} a = -12 \\ b = 15 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (15)^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 4 = 225 + 192 = 417 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-15 \pm \sqrt{417}}{2 \cdot (-12)} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-15 + \sqrt{417}}{-24} = \frac{15 - \sqrt{417}}{24} = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{417}}{24} \\ \searrow x_2 = \frac{-15 - \sqrt{417}}{-24} = \frac{15 + \sqrt{417}}{24} = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{417}}{24} \end{cases} .$$

**Esercizio 5.** Risolvere l'equazione  $\frac{1}{3}x^2 + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 1 = 0$ .

**Soluzione.** Moltiplico tutto per 3 :

$$3 \cdot \left[\frac{1}{3}x^2 + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 1\right] = 3 \cdot 0 \Rightarrow x^2 + (2 - 2\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0;$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - 2\sqrt{2} \\ c = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (2 - 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) =$$

$$= 4 + 8 - 8\sqrt{2} - 12 + 8\sqrt{2} = 0 \quad (1 \text{ soluzione})$$

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2 \cdot 1} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2} = \sqrt{2} - 1 .$$

**Esercizio 6.** Risolvere l'equazione  $3x^2 + 7x = 0$ .

**Soluzione.** Si tratta di un'equazione spuria; è sufficiente mettere in evidenza una  $x$ :

$$3x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(3x + 7) = 0 \begin{cases} \nearrow x_1 = 0 \\ \searrow x_2 = -\frac{7}{3} \end{cases} .$$

**Esercizio 7.** Risolvere l'equazione  $\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4} = 0$ .

**Soluzione.** Si tratta di un'equazione pura; si ha

$$\frac{4}{3}x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{16} \begin{cases} \nearrow x_1 = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \searrow x_2 = -\sqrt{\frac{3}{16}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} .$$

**Esercizio 8.** Risolvere l'equazione  $(2x - 1)^2 = x^2 + \frac{1}{2}$ .

**Soluzione.** Svolgiamo i calcoli algebrici e portiamo tutti i termini a sinistra:

$$4x^2 + 1 - 4x - x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$$

moltiplichiamo tutto per 2:

$$2 \cdot \left( 3x^2 - 4x + \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot 0 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 1 = 0 ;$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -8 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 64 - 24 = 40 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{2 \cdot 6} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{12} = \frac{2(4 + \sqrt{10})}{12} = \frac{4 + \sqrt{10}}{6} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6} \\ \searrow x_2 = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{12} = \frac{2(4 - \sqrt{10})}{12} = \frac{4 - \sqrt{10}}{6} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6} \end{cases} .$$

**Esercizio 9.** Risolvere l'equazione  $\frac{7}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 = -x^2 + x$ .

**Soluzione.** Portiamo tutti i termini a sinistra:

$$\frac{7}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 + x^2 - x = 0 \Rightarrow \frac{9}{2}x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 1 = 0$$

moltiplicando tutto per 2 otteniamo:

$$2 \cdot \left( \frac{9}{2}x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 1 \right) = 2 \cdot 0 \Rightarrow 9x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x - 2 = 0 ;$$

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 2(\sqrt{2} - 1) \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \left[2(\sqrt{2} - 1)\right]^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = 12 - 8\sqrt{2} + 72 = 84 - 8\sqrt{2} > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{2(1 - \sqrt{2}) \pm \sqrt{84 - 8\sqrt{2}}}{2 \cdot 9} = \frac{2(1 - \sqrt{2}) \pm \sqrt{4(21 - 2\sqrt{2})}}{18} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2(1 - \sqrt{2}) \pm 2\sqrt{21 - 2\sqrt{2}}}{18} = \frac{2(1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{21 - 2\sqrt{2}})}{18} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{21 - 2\sqrt{2}}}{9} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{21 - 2\sqrt{2}}}{9} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{21 - 2\sqrt{2}}}{9} \end{matrix}$$

**Esercizio 10.** Risolvere l'equazione  $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} = -5$ .

**Soluzione.** Il dominio dell'equazione è  $x \neq 2, x \neq -1$ .  
Portiamo tutti i termini a sinistra:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} + 5 = 0;$$

scriviamo tutto con un unico denominatore:

$$\frac{(x+1)x - (x-2)2 + (x-2)(x+1)5}{(x-2)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{6x^2 - 6x - 6}{(x-2)(x+1)} = 0;$$

determiniamo ora le soluzioni dell'equazione  $6x^2 - 6x - 6 = 0$ ; dopo aver diviso per 6, otteniamo l'equazione  $x^2 - x - 1 = 0$ :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{matrix};$$

si osservi che i due valori trovati sono accettabili.