Istituto Superiore "XXV aprile" Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Esercizi di ripasso - 4^aC Liceo Scientifico - 11/12/2013

Esercizio 1. In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le affinità di equazioni $\begin{cases} x' = k\,x + 2\,y - k \\ y' = -x - y + k \end{cases}$ dove k è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di k. **(Maturità straordinaria PNI 2004)**

Esercizio 2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = \dfrac{b}{2}\,x - 2\,. \end{cases}$ Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1,0)$ nel punto $(1,-1)$ e stabilire se ammette rette unite. **(Maturità suppletiva PNI 2004)**

Esercizio 3. Determinare le equazioni dell'omotetia di centro $O(0,0)$ che trasforma la retta $r : y = 2\,x + 1$ nella retta $r' : y = 2\,x - 4$. **(Maturità suppletiva PNI 2005 - modif.)**

Esercizio 4. Classificare l'affinità $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y + \sqrt{3} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,y - 1\,. \end{cases}$

Esercizio 5. Determinare le equazioni della simmetria ortogonale rispetto alla retta $y = 3\,x - 1$.

Esercizio 6. Sono assegnati i punti $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$. Determinare le equazioni dell'affinità che trasforma A in B, B in C e C in A.

Esercizio 7. Dire, giustificando la risposta, se esiste un'isometria che trasforma $A(1,0)$ in $A'(1,2)$ e $B(-1,1)$ in $B'(2,-3)$.

Esercizio 8. Determinare le similitudini che trasformano $A(1,0)$ in $A'(1,2)$ e $B(-1,0)$ in $B'(-5,0)$.

Esercizio 9. Determinare l'omotetia di centro $(2,1)$ che trasforma la parabola $\gamma : y = 2\,(x-2)^2 + 1$ nella parabola $\gamma' : y = -6\,(x-2)^2 + 1$.

Esercizio 10. Si consideri la trasformazione $\begin{cases} x' = -y + 4 \\ y' = -x - 2 \end{cases}$. Si dimostri che la trasformazione è una glissosimmetria, determinando la retta r rispetto alla quale viene effettuata la simmetria assiale ed il vettore di traslazione $\overrightarrow{\tau}$ ad essa parallelo. Si determini poi l'immagine γ' della circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 = 4$ mediante la glissosimmetria.

Esercizio 11. (*) Determinare l'equazione dell'ellisse avente centro nell'origine, semiassi di lunghezza $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ e i fuochi sulla retta $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x$.

Esercizio 12. (**) Scrivere l'equazione cartesiana dell'iperbole avente centro in $O(0,0)$, avente fuochi nei punti $F_1\left(\sqrt{\dfrac{5}{8}}\,,\sqrt{\dfrac{5}{8}}\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{\dfrac{5}{8}}\,,-\sqrt{\dfrac{5}{8}}\right)$ e come asintoti le rette $y = 3\,x$ e $y = \dfrac{x}{3}$.

Soluzioni

1) Il luogo è l'asse y escluso il punto $(0,1)$. **2)** Risulta $a = 1$, $b = 2$. Le rette unite sono $y = -x + 2$ e $y = \frac{1}{2}\,x - 1$.
3) Risulta $\begin{cases} x' = -4\,x \\ y' = -4\,y\,. \end{cases}$ **4)** Si tratta della rotazione di $\frac{\pi}{3}$ in senso orario attorno al punto $C(0,-2)$.
5) $\begin{cases} x' = -\frac{4}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y + \frac{3}{5} \\ y' = \frac{3}{5}\,x + \frac{4}{5}\,y - \frac{1}{5}\,. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y + 2\,. \end{cases}$ **7)** No, poiché $d(A,B) \neq d(A',B')$.
8) Similitudine diretta: $\begin{cases} x' = 3\,x - y - 2 \\ y' = x + 3\,y + 1 \end{cases}$; similitudine indiretta: $\begin{cases} x' = 3\,x + y - 2 \\ y' = x - 3\,y + 1\,. \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}\,(x-2) + 2 \\ y' = -\frac{1}{3}\,(y-1) + 1\,. \end{cases}$
10) Si tratta di una isometria indiretta priva di punti uniti, quindi è una glissosimmetria. La retta r che dobbiamo individuare è l'unica retta unita della trasformazione; con i calcoli si trova $r : y = -x + 1$. Il vettore di traslazione si trova semplicemente considerando un punto P qualsiasi della retta r, calcolando la sua immagine P' e calcolando il vettore $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$; si trova $\overrightarrow{\tau} = (3,-3)$. L'immagine di γ è la circonferenza $\gamma' : (x'-4)^2 + (y'+2)^2 = 4$.
11) L'ellisse ha equazione $23\,x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 29\,y^2 - 160 = 0$. **12)** L'iperbole ha equazione $3\,x^2 - 10\,xy + 3\,y^2 + 2 = 0$.