

Esercizi di preparazione alla verifica scritta

4^aC Liceo Scientifico - 26/02/14

Esercizio 1. Si determini l'equazione del piano π passante per i punti $A(1, 1, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-2, 0, 4)$. Quanti metodi conosci per risolvere l'esercizio?

Esercizio 2. Si determini l'equazione del piano α passante per i punti $A(1, 1, 0)$ e $B(1, 0, -2)$ e parallelo alla retta

$$r: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}.$$

Esercizio 3. Si determini l'equazione cartesiana della sfera S avente centro nel punto $C(1, -2, 5)$ e tangente al piano $\pi: 2x - y + 2z - 2 = 0$. Si determini inoltre il punto T di tangenza.

Esercizio 4. Dopo aver verificato che le rette $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 2y - z - 7 = 0 \end{cases}$ sono parallele, si calcoli la loro distanza e si determini il piano π che le contiene. Si determini poi il piano α parallelo a π e passante per $E(0, 1, -4)$; qual è la distanza tra i due piani π ed α ?

Esercizio 5. Si determini la retta s passante per $P(1, 3, -2)$ perpendicolare ed incidente la retta $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

Si determini poi la distanza dell'origine dalla retta s .

Esercizio 6. Si considerino i piani che contengono la retta r passante per i punti $A(2, 0, 3)$ e $B(0, -2, 5)$; tra di essi determinare:

a) quello perpendicolare al piano $\alpha: x - 2y + 2014 = 0$;

b) parallelo al piano $\beta: 2x + 6y - 5z - 9 = 0$;

c) perpendicolare alla retta $s: \begin{cases} x = -5 \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$; d) parallelo alla retta $u: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -8 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$;

e) (***) quelli tangenti alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 2z + 7 = 0$.

Esercizio 7. Data la sfera S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y = 0$ ed il suo punto $P(1, 1, -1)$, si determini l'equazione del piano α tangente in P a S . Si determini il centro ed il raggio della circonferenza γ ottenuta intersecando S con il piano $\pi: x - 2z = 0$.

Esercizio 8. Si fattorizzi in \mathbb{C} il polinomio $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 5$ sapendo che $z = i$ è una delle sue radici. Come si fattorizza il polinomio in \mathbb{R} ?

Esercizio 9. Si risolva l'equazione complessa $(2z - 1)^3 = -i$.

Esercizio 10. Si rappresenti nel piano complesso l'insieme $\begin{cases} |z - 2 + i| > 1 \\ |z - i| < 5 \end{cases}$

Esercizio 11. Ruotare di 90 gradi in senso orario attorno al numero complesso $2 - 4i$ le soluzioni dell'equazione $z^2 - 4z + 2i + 4 = 0$.

Soluzioni

1) $\pi: x + y + z - 2 = 0$. 2) $\alpha: 3x - 2y + z - 1 = 0$. 3) $S: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$; $T\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

4) $d(r, s) = \sqrt{17}$; $\pi: 3x + 3y + 4z - 5 = 0$; $\alpha: 3x + 3y + 4z + 13 = 0$; $d(\pi, \alpha) = \frac{9\sqrt{34}}{17}$.

5) $s: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 4t \end{cases}$; $d(O, s) = \frac{2\sqrt{161}}{7}$.

6) a) è il piano $2x + y + 3z - 13 = 0$; b) non ci sono piani che passano per A e B e paralleli al piano β ;

c) è il piano $y + z - 3 = 0$; d) tutti i piani appartenenti al fascio di sostegno r sono paralleli alla retta u (si osservi che il piano $2x - y + z - 7 = 0$ contiene la retta u); e) si trovano due piani: $x - y - 2 = 0$ e $8x - 3y + 5z - 31 = 0$.

7) $\alpha: 2x - 3y + 2z + 3 = 0$; $C_\gamma = \left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$, $r_\gamma = \frac{\sqrt{345}}{10}$.

8) In \mathbb{C} si ha $(z - i)(z + i)(z + 2 - i)(z + 2 + i)$, mentre in \mathbb{R} si ha $(z^2 + 1)(z^2 + 4z + 5)$.

9) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$, $z_3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$.

10) Si tratta del cerchio di centro $C_1 = i$ e raggio $R_1 = 5$ dal quale viene tolto il cerchio di centro $C_2 = 2 - i$ e raggio $R_2 = 1$.

11) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - i$. Per la rotazione è sufficiente considerare la trasformazione $z' = -i(z - 2 + 4i) + 2 - 4i$, ottenendo così $z'_1 = 7 - 3i$ e $z'_2 = 5 - 5i$.