Esercizi sulle funzioni - 5^aE Liceo Scientifico 04/11/2013

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2} & \text{se } x\neq 0\\[2ex] 1 & \text{se } x=0\,.\end{cases}$$

e si verifichi che non è continua in $x=0$. Che tipo di discontinuità presenta in tale punto? È continua a sinistra? **(Maturità 2011 PNI suppletiva - modif.)**

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x)=(3-x)\sqrt{x+3}$. Determinare la derivata di f. Determinare l'equazione della retta t tangente al suo grafico nel punto di intersezione con l'asse delle ordinate e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani. Calcolare $\lim\limits_{x\to -3^+} f'(x)$. Determinare infine il punto di massimo assoluto della funzione. **(Maturità 2011 PNI suppletiva - modif.)**

Esercizio 3. Si determinino a e b in modo che il grafico della funzione $y=a^{x+b}$ passi dai punti $(1,4)$ e $(3,8)$. **(Maturità 2010 suppletiva)**

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2\,x}$. Determinare i punti di massimo e minimo relativi. Si calcolino a, b, c in modo che risulti $\dfrac{x^2+1}{x^2+2\,x}=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+2}$. **(Maturità 2010 PNI suppletiva - modif.)**

Esercizio 5. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ risulta $f'(x_1)+f'(x_2)=0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata. **(Maturità 2010 PNI suppletiva)**

Esercizio 6. Si determini il punto P della parabola $4\,y=x^2$ più vicino al punto di coordinate $(6,-3)$. **(Maturità 2010 PNI suppletiva)**

Esercizio 7. Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x)=\tan x+\cot x$. **(Maturità 2011 PNI suppletiva - modif.)**

Esercizio 8. Dimostrare che la funzione $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ è costante sull'intervallo $[-1,1]$. Trovare C in modo che risulti $\arcsin x+\arccos x=C$ per ogni $x\in[-1,1]$.

Esercizio 9. Dimostrare che la funzione $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ è costante a tratti e si dia un'espressione più semplice per f.

Esercizio 10. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x)=\sin x\cos^3 x$ nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$. **(Maturità 1987)**

Esercizio 11. Determinare a e b in modo che il grafico della funzione $f(x)=a\,x\,e^{b\,x^2}$ abbia un massimo assoluto nel punto $(1,2)$.

Esercizio 12. Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x)=x-\arctan x-2\,\ln(x^2+1)$.

Esercizio 13. Assegnata la funzione $f(x)=x^x$, trovare il suo punto di minimo assoluto.

Esercizio 14. Dimostrare che la funzione $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è crescente su $\mathbb{R}$. Determinare i suoi asintoti. **(Maturità 2011 suppletiva - modif.)**

Esercizio 15. Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x)=(a\,x+b)\,e^{-\frac{x}{3}}+3$ dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo assoluto nel punto d'ascissa 4 e che $f(0)=2$. **(Maturità 2011)**

Esercizio 16. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$. **(Maturità 2010 suppletiva - modif.)**

Soluzioni. 1. Discontinuità di prima specie con salto $=1$; f è continua a sinistra in quanto $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$. **2.** $f'(x)=-\frac{3\,x+3}{2\sqrt{x+3}}$; $t: y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x+3\sqrt{3}$; area $=9\sqrt{3}$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f'(x)=+\infty$; il grafico di f ha un massimo in $M(-1,4\sqrt{2})$. **3.** $a=\sqrt{2}$, $b=3$. **4.** Massimo in $M\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)$ e minimo in $m\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\big)$; $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{5}{2}$. **6.** $P(2,1)$. **7.** Minimi in $m=\big(\frac{\pi}{4}+k\,\pi,2\big)$, massimi in $M=\big(\frac{3}{4}\,\pi+k\,\pi,-2\big)$. **8.** $C=\frac{\pi}{2}$. **9.** $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0\\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x>0\,.\end{cases}$ **10.** Sull'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$ i minimi si trovano in $m_1(0,0)$ e $m_2\big(\frac{\pi}{2},0\big)$ ed il massimo si trova in $M\big(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{16}\big)$. **11.** $a=2\sqrt{e}$, $b=-\frac{1}{2}$. **12.** Massimo in $M(0,0)$, minimo in $m(4,4-\arctan 4-\ln(289))$. **13.** $m\big(e^{-1},e^{-e^{-1}}\big)$ **14.** $f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$; f ha la retta $y=-1$ come asintoto orizzontale sinistro e $y=1$ come asintoto orizzontale destro. **15.** $a=1$, $b=-1$. **16.** Minimo in $m\big(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\big)$, massimo in $M\big(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\big)$.