Istituto Superiore "XXV aprile" Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Esercizi di preparazione alla verifica scritta
5^aE Liceo Scientifico 09/11/2013

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = x^2(\ln x - 1)$. Si calcoli $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si studi il segno della derivata di f e si calcoli $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.
[R. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ **,** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **.** $f'(x) = x(2\ln x - 1)$ **;** $f'(x) < 0$ **sull'intervallo** $(0, \sqrt{e})$ **,** $f'(x) > 0$ **sull'intervallo** $(\sqrt{e}, +\infty)$ **.** $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ **.]**

Esercizio 2. Si determinino λ e k in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k\ln x + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\lambda x^2 - 1}{3 - x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

risulti derivabile in $x = 1$ e si determini l'equazione della corrispondente retta tangente.
Suggerimento: si ricordi che la continuità è una condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità. **[R.** $\lambda = 3$ **,** $k = \frac{7}{2}$ **. La retta tangente ha equazione** $y = \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}$ **.]**

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

a) Si verifichi che $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.
b) Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nell'origine.
c) Si dica se l'origine è un punto di flesso per il grafico della funzione.
d) Dopo aver verificato che è possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, si trovino i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema suddetto.
[R. a) Risulta $f'(0) = 0$ **. b) La retta tangente nell'origine è l'asse delle ascisse, di equazione** $y = 0$ **. c) Sì, l'origine è** *punto di flesso discendente a tangente orizzontale*. **d) Si trova solo il punto** $c = e^{-1/3}$ **.]**

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{x+2}\right) & \text{se } x < -2 \\ \dfrac{\pi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ \sqrt[3]{1-x} & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

a) Dopo aver verificato che $f(x)$ è continua per ogni x reale, si dica se la funzione è derivabile in $x = -2$ e in $x = 1$.
b) Si dica se f ha un asintoto orizzontale sinistro.
c) Si dica se f ha una asintoto orizzontale destro.
[R. a) Nel punto del grafico di ascissa $x = -2$ **si ha un** *punto angoloso*; **nel punto di ascissa** $x = 1$ **si ha una** *semicuspide*. **b)** $y = 0$ **. c) No.]**

Esercizio 5. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(e^{4x} - 1)\ln(x)\sin(2x)}{(1 - \cos(3x))\ln(1+x)}$$

Suggerimento: ripassa per bene i limiti notevoli! **[R.** 0]