# Esercizi sulle affinità - aprile 2009

Ingegneria meccanica 2008/2009

**Esercizio 1.** *Sono assegnate nel piano le sei rette* $r : x = 1$, $s : x - y = 1$, $t : y = 2$, $r' : y = 1$, $s' : x + y = 2$, $t' : x = 2$*; determinare l'affinità che trasforma ordinatamente le tre rette* $r, s, t$ *nelle tre rette* $r', s', t'$.

Calcolando i punti di intersezione $A = r \cap s$, $B = r \cap t$, $C = s \cap t$, $A' = r' \cap s'$, $B' = r' \cap t'$ e $C' = s' \cap t'$ è sufficiente determinare l'affinità che manda $A, B, C$ ordinatamente in $A', B', C'$. Svolgendo i calcoli si trova la seguente affinità:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} .$$

**Esercizio 2.** *Dire per quali valori di* $k$ *esistono affinità tali che l'immagine di* $(1, 0)$ *sia il punto* $(2, 0)$*, l'immagine del punto* $(0, 1)$ *sia* $(1, 1)$ *e l'immagine dell'origine sia* $(2 + k, 1 - k)$*. Determinare gli eventuali valori di* $k$ *per cui si ottengono isometrie.*

Facendo i calcoli si ottiene:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -k & -k-1 \\ k-1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+k \\ 1-k \end{pmatrix} ;$$

il determinante della matrice è $-1$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, quindi il rapporto delle aree è sempre uguale a $|-1| = 1$, mentre l'orientamento delle figure viene invertita. Se ci sono isometrie, dal momento che il det è $-1$, queste devono essere necessariamente inverse; la matrice deve avere la seguente struttura:

$$\begin{pmatrix} -k & -k-1 \\ k-1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $k = 0$, e quindi l'isometria $\psi$:

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Cerchiamo di classificare questa isometria: si tratta o di una simmetria assiale o di una glissosimmetria. Per vedere in quale caso siamo è sufficiente studiare i punti fissi. L'isometria $\psi$ non ha punti fissi, dunque $\psi$ è una glissosimmetria; più precisamente si tratta di una glissometria avente retta unita la retta $y = -x + \frac{3}{2}$ e vettore di traslazione $\tau = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$. Si osservi che è possibile scrivere $\psi$ nel seguente modo:

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left[ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ;$$

dove la trasformazione tra parentesi quadre è la simmetria assiale rispetto alla retta $y = -x + \frac{3}{2}$.

**Esercizio 3.** *Calcolare le equazioni delle rette unite per l'affinità*

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Poiché $a_{12} \neq 0$, cerchiamo le rette unite solo tra quelle del tipo $y = mx + q$; l'immagine deve essere del tipo $y' = mx' + q$, per cui possiamo scrivere:

$$3\,x + 4\,y - 2 = m(2\,x + 5\,y + 1) + q$$

svolgendo i calcoli troviamo:

$$y = \left(\frac{3 - 2\,m}{5\,m - 4}\right) x + \left(\frac{-m - q - 2}{5\,m - 4}\right)$$

e quindi

$$\begin{cases} m = \dfrac{3 - 2\,m}{5\,m - 4} \\ q = \dfrac{-m - q - 2}{5\,m - 4} \end{cases}$$

risolvendo la prima equazione troviamo $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{3}{5}$.
Sostituendo i due valori trovati nella seconda equazione si trovano i valori $q_1 = -\frac{3}{2}$ e $q_2 = \frac{7}{30}$ .
In definitiva, le rette unite hanno equazione

$$y = x - \frac{3}{2} \;\; ; \;\; y = -\frac{3}{5} + \frac{7}{30} \; ;$$

l'unico punto fisso per la trasformazione $\varphi$ è il punto di coordinate $\left(\dfrac{13}{12}, -\dfrac{5}{12}\right)$ .

**Esercizio 4.** *Determinare le rette unite per l'affinità*

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Poiché $a_{12} = 0$, cerchiamo rette unite del tipo $x = k$ e del tipo $y = mx + q$. Nel primo caso, l'immagine della retta $x = k$ deve essere la retta di equazione $x' = k$:

$$2\,x + 1 = k$$

risolvendo rispetto a $x$ abbiamo:

$$x = \frac{k - 1}{2}$$

e quindi:

$$k = \frac{k - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = -1 \; ;$$

in definitiva l'unica retta unita della forma $x = k$ è la retta di equazione cartesiana $x = -1$. Cerchiamo ora le rette unite della forma $y = mx + q$; si ha:

$$-x + 3\,y - 2 = m(2\,x + 1) + q \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2\,m+1}{3}\,x + \frac{m+q+2}{3}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{2\,m+1}{3} = m \\ \dfrac{m+q+2}{3} = q \end{cases}$$

dalla prima equazione ricaviamo $m = 1$ e, sostituendo tale valore nella seconda equazione, si trova $q = \frac{3}{2}$; in definitiva le due rette unite hanno equazioni $x = -1$ e $y = x + \frac{3}{2}$.

**Esercizio 5.** *Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della curva* $\gamma : 2\,x^2 - xy + y^2 - x + 2\,y - 1 = 0$ *mediante l'affinità* $\varphi$*:*

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

*b) Qual è la controimmagine della curva* $\mathcal{C}' : x'^2 + 5\,x'y' - 3\,y'^2 - 2\,y' + 5 = 0$ *?*

Per prima cosa calcoliamo l'equazione dell'affinità inversa $\varphi^{-1}$:

$$\varphi^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;$$

sostituendo $x$ e $y$ nell'equazione cartesiana di $\gamma$ troviamo:

$$2(3\,x' + 7\,y' - 11)^2 - (3\,x' + 7\,y' - 11)(2\,x' + 5\,y' - 8) +$$

$$+ (2\,x' + 5\,y' - 8)^2 - (3\,x' + 7\,y' - 11) + 2(2\,x' + 5\,y' - 8) - 1 = 0$$

semplificando si ricava l'equazione cartesiana di $\gamma'$:

$$\gamma' : 16\,x'^2 + 75\,x'y' + 88\,y'^2 - 117x' - 274y' + 212 = 0 .$$

b) Basta sostituire le espressioni di $x'$ e $y'$ nell'equazione di $\mathcal{C}'$:

$$(5\,x - 7\,y - 1)^2 + 5(5\,x - 7\,y - 1)(-2\,x + 3\,y + 2) - 3(-2\,x + 3\,y + 2)^2 - 2(-2\,x + 3\,y + 2) + 5 = 0$$

si trova quindi l'equazione cartesiana della curva controimmagine $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} : 37\,x^2 - 111\,xy + 83\,y^2 - 78\,x + 113\,y + 20 = 0 .$$

**Esercizio 6.** *Dire come viene trasformata la circonferenza* $\gamma : x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$ *mediante l'affinità*

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

L'affinità $\varphi$ è una similitudine diretta, avente det $= 25$; le aree vengono moltiplicate per 25 mentre le lunghezze dei segmenti vengono moltiplicate per $\sqrt{25} = 5$. Poiché la circonferenza $\gamma$ ha centro in $C = (1, -2)$ e raggio $R = \sqrt{5}$, $\gamma$ viene trasformata nella circonferenza $gamma'$ avente centro nel punto $C' = (14, -9)$ immagine di $C$ e raggio $R' = 5R = 5\sqrt{5}$. La circonferenza $\gamma'$ ha, perciò, la seguente equazione cartesiana:

$$(x - 14)^2 + (y + 9)^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 28\,x + 18\,y + 152 = 0 .$$

**Esercizio 7.** *Scrivere l'equazione della rotazione di centro* $C = (2, -3)$ *e angolo* 30 *gradi in senso antiorario.*

L'equazione della rotazione è

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} ;$$

svolgendo il prodotto matrice-vettore e semplificando otteniamo:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} .$$

**Esercizio 8.** *Scrivere l'equazione della simmetria assiale rispetto alla retta di equazione cartesiana* $x - 2\,y = 0$.

Il vettore $(2, 1)^T$ deve essere autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$, mentre il vettore $(1, -2)^T$ deve essere autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$; l'origine è un punto fisso.

La matrice dell'affinità è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

per cui l'affinità ha la seguente espressione:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

**Esercizio 9.** *Scrivere le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta $r$ di equazione $3\,x - 4\,y + 2 = 0$.*

Sia $P = (x, y)$ un punto generico e sia $P' = (x', y')$ il suo simmetrico rispetto a $r$. Il punto medio $M$ di $PP'$ è

$$M = \left(\frac{x + x'}{2}; \frac{y + y'}{2}\right)$$

il punto $M$ deve appartenere alla retta $r$, per cui abbiamo:

$$3\left(\frac{x + x'}{2}\right) - 4\left(\frac{y + y'}{2}\right) + 2 = 0$$

inoltre $PP'$ è ortogonale a $r$, per cui si ha:

$$4(x - x') + 3(y - y') = 0$$

per ricavare le equazioni della simmetria assiale è sufficiente risolvere il seguente sistema rispetto a $x'$ e $y'$:

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{x + x'}{2}\right) - 4\left(\dfrac{y + y'}{2}\right) + 2 = 0 \\ 4(x - x') + 3(y - y') = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{7}{25}\,x + \frac{24}{25}\,y - \frac{12}{25} \\ y' = \frac{24}{25}\,x - \frac{7}{25}\,y + \frac{16}{25} \end{cases}$$

**Esercizio 10.** *Determinare le equazioni della simmetria rispetto alla retta $r$ passante per l'origine e formante l'angolo $\frac{\alpha}{2}$ con l'asse delle $x$.*

Si trova il seguente risultato:

$$\begin{cases} x' = x\,\cos\alpha + y\,\sin\alpha \\ y' = x\,\sin\alpha - y\,\cos\alpha \end{cases}$$

**Esercizio 11.** *Scrivere le espressioni delle due similitudini del piano che mandano l'origine nel punto $(1, -2)$ e il punto $(1, -1)$ nel punto $(2, 0)$.*

La similitudine diretta $\varphi$ ha espressione

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;;$$

per determinare i valori di $a$ e $b$ è sufficiente imporre la condizione $\varphi : (1, -1) \mapsto (2, 0)$:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ b - a - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

si trova dunque la similitudine diretta

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Per quanto riguarda la similitudine indiretta $\psi$, abbiamo la seguente espressione:

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ;$$

per determinare i valori di $a$ e $b$ è sufficiente imporre la condizione $\psi : (1, -1) \mapsto (2, 0)$:

$$\begin{cases} a - b + 1 = 2 \\ b + a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

si trova dunque la similitudine indiretta

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

**Esercizio 12.** *Scrivere l'isometria che si ottiene componendo la rotazione con centro $C_1 = (1, 2)$ di 90 gradi in senso antiorario con la rotazione con centro $C_2 = (3, -4)$ di 90 gradi in senso antiorario. Si verifichi che si tratta di una rotazione e si calcolino le coordinate del suo centro.*

La prima rotazione ha equazione

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ;$$

mentre la seconda rotazione ha equazione:

$$\varphi_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - 3 \\ y' + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} .$$

Se calcoliamo l'equazione dell'isometria $\varphi_2 \circ \varphi_1$ otteniamo:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} ;$$

si tratta di una rotazione (la matrice è di rotazione ed è diversa dalla matrice identica); per calcolare le coordinate del centro della rotazione basta trovare il punto fisso:

$$\begin{cases} x = -x - 2 \\ y = -y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

in definitiva abbiamo ottenuto la rotazione di un angolo piatto attorno al punto $C = (-1, -2)$; la trasformazione può essere vista anche come una simmetria centrale rispetto al punto $P = (-1, -2)$. Si osservi, comunque, che ogni simmetria centrale rispetto ad un punto $P$ è una rotazione di un angolo piatto con centro in $P$.
Si dimostri per esercizio che, invertendo l'ordine di composizione si ottiene ancora una rotazione di un angolo piatto, ma di centro diverso: le due rotazioni $\varphi_1$ e $\varphi_2$, quindi, non commutano.

**Esercizio 13.** *Si consideri l'affinità $\varphi$ che manda l'origine nel punto $O' = (1, -2)$, il punto $A = (1, -1)$ in $A' = (0, 1)$ e il punto $B = (2, 1)$ nel punto $B' = (3, -2)$; si dimostri che $\varphi$ trasforma il baricentro del triangolo $OAB$ nel baricentro del triangolo $O'A'B'$.*

**Esercizio 14.** *Si calcolino le rette unite per la trasformazione*

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

L'affinità $\varphi$ rappresenta un'isometria inversa; calcoliamo i punti fissi:

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

il sistema ammette infinite soluzioni: i punti fissi sono tutti e soli quelli che appartengono alla retta $r$ di equazione cartesiana $x-y+3 = 0$. L'affinità $\varphi$ è, perciò, una simmetria assiale rispetto alla retta $r$. Determiniamo ora le rette unite per $\varphi$; poiché l'elemento $a_{12}$ è diverso da zero, analizziamo solamente le rette della forma $y = mx + q$ che hanno per immagine $y' = mx' + q$:

$$x + 3 = m(y - 3) + q \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{m}\,x + \frac{3 + 3\,m - q}{m}$$

quindi

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{m} \\[2ex] q = \dfrac{3 + 3\,m - q}{m} \end{cases}$$

dalla prima equazione si ricavano le soluzioni $m_1 = 1$ e $m_2 = -1$; sostituendo nella seconda equazione si trovano le soluzioni $q_1 = 3$ e $q_2 = k$ per cui le rette unite sono:

$$y = x + 3 \;\; ; \;\; y = -x + k \;\; (\text{con } k \in \mathbb{R}) .$$

questo risultato poteva anche essere ottenuto senza fare calcoli, in quanto ogni simmetria assiale ha una retta costituita da punti fissi (ovvero la retta $r$ rispetto alla quale viene effettuata la simmetria) ed ha come rette unite tutte le rette perpendicolari a $r$.

**Esercizio 15.** *Determinare l'espressione dell'affinità che manda la retta $r : 3\,x - y + 1 = 0$ nell'asse $x$, la retta $s : x - 2\,y + 2 = 0$ nell'asse $y$ e il punto $P = (2, 0)$ nel punto $P' = (-1, 4)$.*

Le affinità che rispettano le prime due condizioni hanno la seguente espressione:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h(x - 2\,y + 2) \\ k(3\,x - y + 1) \end{pmatrix}$$

a questo punto è sufficiente imporre la terza condizione, ottenendo il seguente sistema nelle incognite $h, k$:

$$\begin{cases} h(2-2\cdot 0+2) = -1 \\ k(3\cdot 2-0+1) = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h = -\frac{1}{4} \\ k = \frac{4}{7} \end{cases}$$

in definitiva l'espressione dell'affinità $\varphi$ è:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ \frac{12}{7}x - \frac{4}{7}y + \frac{4}{7} \end{pmatrix} .$$

**Esercizio 16.** *Consideriamo le affinità del piano tali che l'immagine dell'origine sia il punto* $(1, 0)$*, l'immagine del punto* $(1, 0)$ *sia il punto* $(0, 1)$ *e l'immagine del punto* $(0, t)$ *sia* $(0, 0)$*. Al variare del parametro* $t \neq 0$ *si descriva il luogo descritto dalle immagini del punto* $(-1, 1)$*.*

Facendo i calcoli si scopre che le affinità, per $t \neq 0$, hanno la forma seguente:

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

calcoliamo ora l'immagine, al variare di $t \neq 0$, del punto $(-1, 1)$:

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{t} \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

attenzione, **il luogo descritto è contenuto nella retta di equazione $y = -1$, ma non coincide con la retta** $y = -1$: il luogo descritto è la retta $y = -1$ privata del punto $(2, -1)$ (infatti, l'equazione $2 - \frac{1}{t} = k$ ha soluzione se e solo se $k \neq 2$).