Capitolo 1

Ingegneria Meccanica; Algebra lineare e Geometria 2008/2009

1.1 Esercizi svolti su rette e piani

Esercizio 1. *Stabilire se le due rette r e s sono coincidenti oppure no:*

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Ci sono tre metodi per risolvere l'esercizio.

Primo metodo: prendiamo il punto P_0 della retta r e vediamo se appartiene all'altra retta s; per questo dobbiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3 = 7 - 4t \\ -4 = 6 - 10t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

il sistema è soddisfatto; a questo punto dobbiamo confrontare i due vettori direttori e vedere se sono proporzionali:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

si vede subito che risulta $k = -1/2$. A questo punto possiamo affermare che le due rette sono coincidenti.

Secondo metodo: visto che i P_0 delle due rette sono diversi, è sufficiente vedere se ciascun P_0 appartiene all'altra retta; ora, dal primo metodo sappiamo che ciò è vero per il P_0 della prima retta, quindi procediamo al calcolo dell'altro P_0:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 7 = 3 + 2t \\ 6 = -4 + 5t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

il sistema risulta soddisfatto. Le due rette coincidono dal momento che hanno due punti distinti in comune. **Attenzione:** questo metodo è corretto se i due P_0 sono distinti.

Terzo metodo: intersechiamo le due rette, arrivando al sistema lineare

$$\begin{cases} 3 + 2t = 7 - 4t' \\ -4 + 5t = 6 - 10t' \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2t + 4t' = 4 \\ 5t + 10t' = 10 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{sistema indeterminato}$$

le due rette sono quindi coincidenti.

Esercizio 2. *Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto A di coordinate* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e parallela alla retta r di equazione* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Se prendiamo Q in modo tale che il vettore direttore della retta r sia uguale al vettore $\overrightarrow{OQ}$, possiamo scrivere l'equazione vettoriale della retta s:

$$s:\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OQ}$$

applicando F_β ad entrambi i membri dell'ultima equazione scritta arriviamo alla rappresentazione parametrica della retta s:

$$s:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti A di coordinate* $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e B di coordinate* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

L'equazione vettoriale della retta r è:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

applicando F_β ad entrambi i membri dell'ultima equazione scritta arriviamo alla rappresentazione parametrica della retta r:

$$r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad\to\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto A di coordinate* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e parallela alla retta r passante per i punti B di coordinate* $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *e C di coordinate* $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

L'equazione vettoriale della retta s è:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$$

applicando F_β ad entrambi i membri dell'ultima equazione scritta arriviamo alla rappresentazione parametrica della retta r:

$$s:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) \quad\to\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

Osservazione: se vogliamo che le coordinate del vettore direttore siano tutte intere, è sufficiente moltiplicarle per 3. L'equazione così ottenuta risulta essere equivalente alla precedente:

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. *Calcolare l'intersezione delle rette* $r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Per cercare l'intersezione delle due rette dobbiamo utilizzare due parametri diversi, t e t':

$$\begin{cases} -2+3t = 4-t' \\ 3+5t = -2+2t' \\ -5-t = 2+2t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t' = 6-3t \\ 3+5t = -2+2(6-3t) \\ -5-t = 2+2(6-3t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t' = 6-3t \\ t = \frac{7}{11} \\ t = \frac{19}{5} \end{cases}$$

il sistema è impossibile, quindi le due rette non hanno intersezione. Ci possiamo allora chiedere se sono parallele o sghembe. Vediamo se le rette sono parallele: basta confrontare i due vettori direttori e guardare se sono proporzionali

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3 = -k \\ 5 = 2k \\ -1 = 2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = \dfrac{5}{2} \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

il sistema è impossibile; le rette sono quindi sghembe.

Esercizio 6. *Stabilire se il punto A di coordinate* $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *appartiene al piano π di equazione parametrica* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Per prima cosa verifichiamo che l'equazione parametrica scritta rappresenta effettivamente un piano; per fare questo è sufficiente analizzare i vettori di giacitura e stabilire che non sono proporzionali:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 = 3k \\ -3 = 5k \\ 5 = -k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = -\frac{3}{5} \\ k = -5 \end{cases}$$

il sistema è impossibile, quindi i vettori di giacitura non sono proporzionali $\Rightarrow$ l'equazione scritta definisce correttamente un piano nello spazio.

Per stabilire se il punto $a \in \pi$, dobbiamo risolvere il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} -1 = -1 + 2t + 3s \\ -3 = 2 - 3t + 5s \\ 2 = -1 + 5t - s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t + 3(5t-3) = 0 \\ 3t - 5(5t-3) = 5 \\ s = 5t - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{17} \\ t = \frac{5}{11} \\ s = 5t - 3 \end{cases}$$

il sistema è impossibile: il punto non appartiene al piano.

Esercizio 7. *Determinare l'equazione del piano π passante per i punti* $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ *e* $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Scriviamo per prima cosa l'equazione vettoriale del piano:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + s\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

applicando F_β ad entrambi i membri dell'ultima equazione scritta arriviamo alla rappresentazione parametrica della retta r:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

l'equazione del piano π risulta essere:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. *Stabilire se i punti* $A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ *e* $C \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sono allineati.*

Possiamo procedere in due modi.

Primo metodo: scriviamo la retta passante per i punti A e B e vediamo se il terzo punto C appartiene a questa retta. La retta r passante per A e B ha equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a questo punto cerchiamo di risolvere il sistema seguente (stiamo guardando se C appartiene alla retta r):

$$\begin{cases} 23 = 5 - 6t \\ -4 = 2 + 2t \\ 0 = -3 - t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases}$$

il sistema è determinato $\Rightarrow$ i tre punti assegnati sono allineati.

Secondo metodo: si confrontano i vettori $\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$ e $\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$ guardando se sono proporzionali:

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-6\\2\\-1\end{pmatrix}\;;$$

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\left(\begin{pmatrix}23\\-4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}18\\-6\\3\end{pmatrix}$$

i due vettori sono proporzionali in quanto:

$$\begin{pmatrix}18\\-6\\3\end{pmatrix}=(-3)\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\-1\end{pmatrix}$$

questo ci indica l'allineamento dei tre punti assegnati A, B e C.

Esercizio 9. *Riesci a scrivere la retta* $r:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ *in modo del tutto equivalente ma utilizzando altri numeri?*

E' possibile procedere in questo modo: si assegna al parametro t un valore $\neq 0$ determinando così un punto che appartiene alla retta; questo punto sarà il nuovo P_0. Per quanto riguarda il vettore direttore basta moltiplicarlo per un numero $k \neq 0$. Ad esempio, scelto $t=4$ e $k=-2$ si ottiene una nuova equazione, ma equivalente a quella assegnata:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\25\\-12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\-12\\6\end{pmatrix}\;.$$

Esercizio 10. *Riesci a scrivere il piano* $\pi:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\9\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-7\\11\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ *in modo del tutto equivalente ma utilizzando altri numeri?*

E' possibile procedere in modo analogo all'esercizio precedente; attribuiamo ai due parametri i valori $t=-1$ e $s=3$ ed otteniamo un nuovo P_0:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\9\\-5\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\11\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\19\\-7\end{pmatrix}$$

per avere dei nuovi vettori di giacitura è possibile prendere $t=1, s=-2$ per un vettore e $t=2, s=3$ per l'altro (si osservi che le coppie $(1;-2)$ e $(2;3)$ non sono proporzionali):

$$\overrightarrow{\imath}=1\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\11\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-9\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\jmath}=2\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\11\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-11\\31\end{pmatrix}$$

in definitiva abbiamo questa nuova equazione parametrica (equivalente però a quella iniziale):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \\ 31 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 11. *Determina l'intersezione (se esiste) tra la retta r passante per i punti $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed il piano π di equazione* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Scriviamo prima di tutto l'equazione parametrica della retta r:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

per determinare l'intersezione della retta con il piano dobbiamo risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 1+t+s = 1-t' \\ 1+t-s = t' \\ 1+s = 2t' \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ s = 0 \\ t' = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

il sistema è determinato: c'è un unico punto di intersezione E e, visto che siamo interessati alle sue coordinate, possiamo sostituire i parametri ottenuti al posto della retta e del piano. Per semplicità, ovviamente, conviene sostituire $t' = \frac{1}{2}$ nell'equazione parametrica della retta r:

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

ovviamente troviamo lo stesso risultato sostituendo $t = -\frac{1}{2}$ e $s = 0$ nell'equazione parametrica del piano π:

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 12. *Scrivere l'equazione cartesiana del piano π così definito:*

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Riscriviamo l'equazione del piano sotto forma di sistema:

$$\begin{cases} x = 1+t-4s \\ y = 3+2t-3s \\ z = 4-t+2s \end{cases}$$

ricaviamoci il parametro t dalla prima equazione e sostituiamo l'espressione di t nelle altre due equazioni; poi ci ricaviamo il parametro s dalla seconda e lo sostituiamo nella terza:

$$\begin{cases} t = x + 4s - 1 \\ y = 3 + 2(x + 4s - 1) - 3s \\ z = 4 - (x + 4s - 1) + 2s \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = x + 4s - 1 \\ s = \dfrac{y - 2x - 1}{5} \\ z = 5 - x - 2\left(\dfrac{y - 2x - 1}{5}\right) \end{cases}$$

semplificando la terza equazione, nella quale non appaiono più i parametri, otteniamo l'equazione cartesiana del piano:

$$x + 2y + 5z - 27 = 0 \ .$$

Verifichiamo se le coordinate del punto P_0 soddisfano l'equazione appena ricavata:

$$1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 27 = 0 \ ;$$

questo controllo però non è sufficiente per poter affermare di aver fatto tutto in modo corretto. Sostituiamo allora le coordinate del punto generico P nell'equazione cartesiana del piano:

$$1 + t - 4s + 2 \cdot (3 + 2t - 3s) + 5 \cdot (4 - t + 2s) - 27 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \ .$$

Esercizio 13. *Sia $\beta = \{\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\}$ una base di $\mathcal{V}^3_O$. Si calcoli le coordinate di $3\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath}$ rispetto alla base $\beta' = \{2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}; 3\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\}$.*

E' sufficiente impostare l'equazione:

$$3\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} = x\,(2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}) + y\,(3\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})$$

svolgendo i calcoli otteniamo:

$$3\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} = (2x + 3y)\overrightarrow{\imath} + (x - y)\overrightarrow{\jmath}$$

uguagliando i coefficienti di $\overrightarrow{\imath}$ e di $\overrightarrow{\jmath}$ arriviamo al sistema lineare 2×2

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{7}{5} \end{cases} \ .$$

Esercizio 14. *Sono assegnate le rette $r: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1-a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $s: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$; stabilire per quali valori di a le due rette sono parallele.*

Analizziamo i vettori direttori e guardiamo per quali valori di a risultano proporzionali:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$$

si trova subito che deve essere necessariamente $a = 4$. Questo ci assicura che le rette sono parallele? No, dobbiamo continuare la nostra analisi, in quanto potrebbero essere due rette coincidenti. Vediamo se il P_0 della retta s appartiene alla retta r (ho sostituito $a = 4$):

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 12 = 8 + t \\ 2 = -3 + 2t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 4 \\ t = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

il sistema è impossibile: per $a = 4$ le due rette sono parallele.

Esercizio 15. *Stabilire per quali valori di a la retta di equazione parametrica*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

è contenuta nel piano π di equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ci conviene determinare l'equazione cartesiana del piano e successivamente sostituire le equazioni della retta al posto di x, y e z. Vediamo allora l'equazione cartesiana del piano:

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 + 2s \\ z = 1 - t + s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + t - \left(\dfrac{y-2}{2}\right) \\ s = \dfrac{y-2}{2} \\ z = 1 - t + \dfrac{y-2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = x - 2 + \frac{1}{2}\, y \\ s = \dfrac{y-2}{2} \\ z = 1 - \left(x - 2 + \frac{1}{2}\, y\right) + \dfrac{y-2}{2} \end{cases}$$

arriviamo all'equazione cartesiana

$$x + z - 2 = 0$$

a questo punto possiamo sostituire le equazioni della retta:

$$at + (1 - t) - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (a - 1)\, t = 1$$

dal momento che la retta deve essere contenuta nel piano π, l'ultima equazione scritta deve essere verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$; ma ciò non può accadere, dal momento che l'equazione dovrebbe essere del tipo $0 \cdot t = 0$. Ne deduciamo che non esiste nessun valore di a per cui la retta è contenuta nel piano π; non solo, ma possiamo anche affermare che, se $a = 1$, la retta risulta parallela al piano (non ci sono intersezioni con π); se invece $a \neq 1$ la retta interseca il piano in un solo punto.

Esercizio 16. *Scrivere l'equazione parametrica di una retta contenuta nel piano dell'esercizio precedente.*

E' sufficiente considerare la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oppure la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

In generale, una retta contenuta nel piano ha equazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

dove $(a; b) \neq (0; 0)$.

Esercizio 17. *Scrivere le equazioni parametriche della retta intersezione dei due piani di equazioni cartesiane* $x - 2y + z - 1 = 0$ *e* $3x + y - 4z + 2 = 0$.

Ricaviamoci la x da entrambe le equazioni considerando z come parametro t, ottenendo:

$$\begin{cases} x = 2y - t + 1 \\ x = \dfrac{-y + 4t - 2}{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = t - \dfrac{3}{7} \\ y = t - \dfrac{5}{7} \end{cases}$$

l'equazione parametrica cercata è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 18. *Determinare l'equazione del piano contenente la retta di equazione* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e passante per il punto* $A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Primo metodo: E' sufficiente determinare il piano passante per tre punti, di cui due appartengono alla retta e il terzo è proprio il punto A. Per ottenere le coordinate di due punti B, C sulla retta basta prendere $t = 0$ e $t = 1$ (non è l'unica scelta):

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ;$$

il piano passante per i tre punti ha equazione vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + s\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

applicando come al solito la trasformazione F_β otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Secondo metodo: Se indichiamo con $\overrightarrow{OQ}$ il vettore direttore della retta, il piano ha equazione vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OQ} + s\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

passando alle coordinate abbiamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

l'equazione trovata è diversa dalla precedente, ma è ad essa equivalente.

Esercizio 19. *Verificare che i tre punti* $A\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ *e* $C\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ *sono allineati e determinare l'equazione di tutti i piani che passano per essi.*

Verifichiamo per prima cosa l'allineamento dei tre punti con la proporzionalità dei due vettori:

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} \;\; ; \;\; \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$

passando alle coordinate con l'applicazione F_β si ottiene:

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \;\; ; \;\; \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

si vede subito che risulta

$$\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=3\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right) \; .$$

Passiamo ora alla determinazione dell'equazione dei piani che passano per questi punti; questi piani devono contenere la retta passante per A e B, che ha equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \; ;$$

un piano che contiene questa retta ha equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

dove il secondo vettore di giacitura non è proporzionale all'altro.

Esercizio 20. *Determinare l'equazione cartesiana del piano*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \; .$$

Si nota subito che la coordinata y è uguale a 5 indipendentemente dal valore dei parametri; prima però di affermare che l'equazione è $y=5$ dobbiamo verificare che i due vettori di giacitura non sono proporzionali:

$$\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}3=-2k\\0=0\cdot k\\-3=k\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}k=-\frac{3}{2}\\0=0\\k=-3\end{cases}$$

il sistema è impossibile, quindi si tratta effettivamente di un piano; l'equazione cercata è $y=5$.

Esercizio 21. *Scrivere le equazioni parametriche del piano di equazione cartesiana* $3x+5y-2z-8=0$.

Ricaviamoci la x considerando le altre variabili come parametri t e s:

$$x = \frac{2z - 5y + 8}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2s - 5t + 8}{3}$$

possiamo allora scrivere:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2s - 5t + 8}{3} \\ t \\ s \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

In modo del tutto equivalente potevamo ricavarci la y:

$$y = \frac{2s - 3t + 8}{5}$$

possiamo allora scrivere:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \dfrac{2s - 3t + 8}{5} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

in questo modo abbiamo un'altra rappresentazione parametrica, diversa dalla precedente ma ad essa equivalente.

Esercizio 22. *Scrivi le equazioni cartesiane della retta*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Ricaviamoci il parametro t da tutte e tre le equazioni:

$$\begin{cases} t = x - 3 \\ t = 2 - y \\ t = \dfrac{z + 1}{3} \end{cases}$$

uguagliando a due a due le equazioni arriviamo a scrivere le equazioni cartesiane della retta:

$$\begin{cases} x - 3 = 2 - y \\ 2 - y = \dfrac{z + 1}{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3y + z - 5 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 23. *Scrivere le equazioni cartesiane della retta*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Questa volta non è possibile ricavare il parametro t da tutte e tre le equazioni; possiamo ricavarlo dalla prima e dalla terza, ottenendo:

$$\begin{cases} t = \dfrac{1-x}{4} \\ t = \dfrac{z-5}{7} \end{cases}$$

uguagliando otteniamo: $\dfrac{1-x}{4} = \dfrac{z-5}{7}$. Manca un'altra equazione; basta guardare l'equazione parametrica della retta e ci accorgiamo che la y è sempre uguale a -4, per cui l'altra equazione è semplicemente $y = -4$. In definitiva, le equazioni cartesiane della retta risultano essere:

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{4} = \dfrac{z-5}{7} \\ y = -4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 7x + 4z - 27 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 24. *Determina l'intersezione della retta*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con il piano xz.

Primo metodo: il piano xz ha equazione cartesiana $y = 0$, per cui è sufficiente risolvere l'equazione

$$-2 - 2t = 0 \quad \rightarrow \quad t = -1 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Secondo metodo: scriviamo l'equazione parametrica del piano xz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e cerchiamo l'intersezione con la retta, risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 + t = t' \\ -2 - 2t = 0 \\ 4 + t = s \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = -1 \\ t' = 0 \\ s = 3 \end{cases}$$

sostituendo nelle equazioni della retta e del piano otteniamo $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 25. *Determina l'equazione parametrica della retta intersezione dei due piani*

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \pi' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Primo metodo: Risolviamo il sistema lineare (3 equazioni in 4 incognite) seguente:

$$\begin{cases} 1+t-s=-2-s' \\ 1-2t+3s=1+t'+2s' \\ t+s=-1+t'+s' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t-s+s'=-3 \\ s-t'=-6 \\ t'-2s'=14 \end{cases}$$

ricaviamoci il parametro t' in funzione del parametro s':

$$t'=2s'+14$$

e sostituiamolo nell'equazione parametrica del piano π':

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (2s'+14)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Secondo metodo: scriviamo l'equazione cartesiana del piano π e sostituiamo alle variabili x, y e z le equazioni parametriche del piano π'. L'equazione cartesiana del piano π è

$$5x+2y-z-7=0$$

sostituendo le equazioni parametriche del piano π' otteniamo:

$$5(-2-s)+2(1+t+2s)-(-1+t+s)-7=0$$

ricavandoci il parametro t in funzione del parametro s abbiamo:

$$t=2s+14$$

sostituendo nell'equazione parametrica di π' ricaviamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (2s+14)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Terzo metodo: scriviamo le equazioni cartesiane dei due piani:

$$\pi:\ 5x+2y-z-7=0 \quad ; \quad \pi':\ x+y-z=0$$

scriviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x+2y-z-7=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=7-4x \\ z=7-3x \end{cases}$$

(abbiamo considerato la x come un parametro); possiamo allora scrivere:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

non è difficile verificare che questa equazione è equivalente alle altre.