Esercizi sulle superfici - aprile 2009

Ingegneria meccanica 2008/2009

Esercizio 1. *Scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la retta* $s : x = y, y = 2\,z$ *attorno alla retta* $r : x = -y, x = 3\,z$.

Soluzione: dal momento che le due rette si intersecano nell'origine, la superficie è un cono circolare avente vertice nell'origine. Consideriamo un generico punto $P \in s$:

$$P = \begin{cases} x = 2\,t \\ y = 2\,t \\ z = t \end{cases}$$

e determiniamo l'equazione cartesiana della circonferenza γ_P descritta dal punto P nella rotazione attorno alla retta r; la curva γ_P può essere ottenuta come intersezione della sfera Γ_P avente centro nel punto $C = (0, 0, 0)$ e passante per il punto P (il raggio è perciò uguale a $CP = \sqrt{(2\,t)^2 + (2\,t)^2 + t^2} = 3\,|t|$) con il piano π_P passante per P e ortogonale a r:

$$\begin{cases} (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 9\,t^2 \\ 3(x - 2\,t) - 3(y - 2\,t) + (z - t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9\,t^2 \\ 3\,x - 3\,y + z = t \end{cases}$$

eliminando il parametro t ricaviamo l'equazione cartesiana del cono:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9(3\,x - 3\,y + z)^2\ ;$$

sviluppando si ottiene:

$$40\,x^2 + 40\,y^2 + 4\,z^2 - 81\,xy + 27\,xz - 27\,yz = 0\ .$$

Esercizio 2. *Scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la retta* $s : x = y+1, y = 2\,z$ *attorno alla retta* $r : x = -y, x = 3\,z$.

Soluzione: dal momento che le due rette sono sghembe la superficie è un iperboloide a una falda. Consideriamo un generico punto $P \in s$:

$$P = \begin{cases} x = 2\,t + 1 \\ y = 2\,t \\ z = t \end{cases}$$

e determiniamo l'equazione cartesiana della circonferenza γ_P descritta dal punto P nella rotazione attorno alla retta r; la curva γ_P può essere ottenuta come intersezione della sfera Γ_P avente centro nel punto $C = (0, 0, 0)$ e passante per il punto P (il raggio è perciò uguale a $CP = \sqrt{(2\,t+1)^2 + (2\,t)^2 + t^2} = \sqrt{9\,t^2 + 4\,t + 1}$) con il piano π_P passante per P e ortogonale a r:

$$\begin{cases} (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 9\,t^2 + 4\,t + 1 \\ 3(x - 2\,t - 1) - 3(y - 2\,t) + (z - t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9\,t^2 + 4\,t + 1 \\ 3\,x - 3\,y + z - t - 3 = 0 \end{cases}$$

eliminando il parametro t dalla seconda equazione ricaviamo l'equazione cartesiana del cono:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9(3\,x - 3\,y + z - 3)^2 + 4(3\,x - 3\,y + z - 3) + 1\ ;$$

sviluppando si ottiene:

$$40\,x^2 + 40\,y^2 + 4\,z^2 - 81\,xy + 27\,xz - 27\,yz - 75\,x + 75\,y - 25\,z + 35 = 0\ .$$

Esercizio 3. *Determinare l'equazione del cono di vertice* $V = (0, 0, 2)$ *e passante per la circonferenza di equazioni*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

I punti $P = (x, y, z)$ del cono soddisfano le equazioni seguenti:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 - t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

dove (a, b, c) è un punto della circonferenza; possiamo scrivere il sistema seguente:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = 0 \\ c = 0 \\ x = ta \\ y = tb \\ z = 2 - 2\,t + tc \end{cases}$$

eliminando i parametri a, b, c, t otteniamo l'equazione del cono.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = 0 \\ c = 0 \\ x = \dfrac{2 - z}{2}\, a \\ y = \dfrac{2 - z}{2}\, b \\ t = \dfrac{2 - z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = 0 \\ c = 0 \\ a = \dfrac{2\,x}{2 - z} \\ b = \dfrac{2\,y}{2 - z} \\ t = \dfrac{2 - z}{2} \end{cases}$$

sostituendo le espressioni di a e b nella prima equazione abbiamo:

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\,x}{2 - z}\right)^2 + \left(\frac{2\,y}{2 - z}\right)^2 - 1 = 0$$

moltiplicando per $(2 - z)^2$ e semplificando otteniamo l'equazione del cono:

$$4\,x^2 + 4\,y^2 - z^2 + 4\,z - 4 = 0\ .$$

Esercizio 4. *Scrivere l'equazione della superficie ottenuta ruotando la curva* $\gamma : z = y^2, x = 0$ *attorno all'asse* z.

I punti $P = (x, y, z)$ della superficie soddisfano il sistema seguente:

$$\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ c = b^2 \\ a = 0 \end{cases}$$

eliminando i parametri a, b, c si ottiene l'equazione cartesiana della superficie:

$$\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 + z^2 = c + c^2 \\ c = b^2 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 + z^2 = z + z^2 \\ c = b^2 \\ a = 0 \end{cases}$$

l'equazione della superficie, pertanto, è la seguente:

$$z = x^2 + y^2 \ ;$$

si tratta di un paraboloide di rotazione.

Esercizio 5. *Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro passante per la curva* $\gamma : x + y = 1, x^2 + z = 0$ *e parallelo alla direzione* $(1, 1, -1)$.

I punti $P = (x, y, z)$ del cilindro soddisfano il sistema seguente:

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = b + t \\ z = c - t \\ a + b = 1 \\ a^2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - a + t \\ z = -a^2 - t \\ b = 1 - a \\ c = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x - y + 1}{2} \\ t = \dfrac{x + y - 1}{2} \\ z = -a^2 - t \\ b = 1 - a \\ c = -a^2 \end{cases}$$

sostituendo le espressioni di a e t nell'equazione $z = -a^2 - t$ otteniamo:

$$z = -\left(\frac{x - y + 1}{2}\right)^2 - \frac{x + y - 1}{2}$$

e quindi, moltiplicando per 4, ricaviamo l'equazione cartesiana del cilindro:

$$x^2 + y^2 - 2\,xy + 4\,x + 4\,z - 1 = 0 \ .$$

Esercizio 6. *Scrivere l'equazione cartesiana del cono di vertice l'origine e contenente la curva* $\gamma : y = z^2, x + y - z = 1$.

I punti $P = (x, y, z)$ soddisfano il sistema seguente:

$$\begin{cases} x = a\,t \\ y = b\,t \\ z = c\,t \\ b = c^2 \\ a + b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x}{t} \\ b = \dfrac{y}{t} \\ c = \dfrac{z}{t} \\ b = c^2 \\ \dfrac{x}{t} + \dfrac{y}{t} - \dfrac{z}{t} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x}{x+y-z} \\ b = \dfrac{y}{x+y-z} \\ c = \dfrac{z}{x+y-z} \\ b = c^2 \\ t = x + y - z \end{cases}$$

sostituendo le espressioni di a, b, c nell'equazione $b = c^2$ ricaviamo l'equazione cartesiana del cono:

$$\frac{y}{x+y-z} = \left(\frac{z}{x+y-z}\right)^2$$

semplificando otteniamo l'equazione richiesta:

$$y^2 - z^2 + xy - yz = 0\ .$$

Esercizio 7. *Data la superficie di equazione* $x^2 - 2\,zy - 1 = 0$, *si verifichi che vi sono due rette passanti per il punto* $(1, 1, 0)$ *giacenti interamente sulla superficie, determinandone la direzione.*

Scriviamo una generica retta passante per il punto $P = (1, 1, 0)$ e impostiamo il sistema con la superficie:

$$\begin{cases} x = 1 + t\,a \\ y = 1 + t\,b \\ z = t\,c \\ x^2 - 2\,zy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t\,a \\ y = 1 + t\,b \\ z = t\,c \\ (a^2 - 2\,bc)t^2 + (2\,a - 2\,c)t = 0 \end{cases}$$

poiché dobbiamo individuare le rette interamente giacenti sulla superficie, dobbiamo imporre che l'ultima equazione sia sempre risolta per ogni valore reale di t (si osservi che $t = 0$ è sempre soluzione in quanto il punto P appartiene alla superficie):

$$\begin{cases} a^2 - 2\,bc = 0 \\ 2\,a - 2\,c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2\,bc = 0 \\ a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\,(c - 2\,b) = 0 \\ a = c \end{cases}$$

otteniamo due direzioni:

$$\begin{cases} a = 2\,k \\ b = k \\ c = 2\,k \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = k \\ c = 0 \end{cases}$$

le equazioni parametriche di due rette interamente giacenti sulla superficie sono:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + 2\,t \end{cases} .$$

Esercizio 8. *Dire se la superficie di equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 4\,xy - 1 = 0$ è di rotazione attorno alla retta $r : x = y, z = 0$.*

Prendiamo un piano contenente la retta r; ad esempio il piano $\pi : x = y$. Intersechiamo il piano π con la superficie, ottenendo così la curva piana γ:

$$\gamma : \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 - z^2 + 4\,xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ 6\,x^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

facendo ruotare γ attorno a r abbiamo:

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ a = b \\ 6\,a^2 - c^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 2\,a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8\,a^2 - 1 \\ a = b \\ c^2 = 6\,a^2 - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{x + y}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8\left(\dfrac{x + y}{2}\right)^2 - 1 \\ a = b \\ c^2 = 6\,a^2 - 1 \end{cases}$$

l'equazione cartesiana della superficie di rotazione, pertanto, risulta essere:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 4\,xy - 1 = 0\ ;$$

avendo ottenuto la superficie di partenza, possiamo affermare che la superficie è di rotazione attorno alla retta r.

Esercizio 9. *Trovare l'equazione cartesiana della superficie ottenuta ruotando la retta $s : x = y + 1, y = 2\,z$ attorno alla retta $r : x = y, y = z - 1$. Si trovi il raggio della circonferenza di raggio minimo contenuta nella superficie.*

Facendo i calcoli si trova l'iperboloide rotondo (o di rotazione) a una falda avente equazione cartesiana:

$$8\,x^2 + 8\,y^2 + 8\,z^2 - 9\,xy - 9\,xz - 9\,yz + 4\,x + 4\,y - 21\,z - 12 = 0\ .$$

Per quanto riguarda la circonferenza di raggio minimo possiamo trovare il segmento di minima lunghezza avente per estremi un punto A di r e un punto B di s; il vettore $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ deve risultare ortogonale sia al vettore direttore di r sia al vettore direttore di s:

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot (1,1,1)^T = 0 \\ \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot (2,2,1)^T = 0 \end{cases}$$

quindi abbiamo:

$$\begin{cases} 1(1 + 2\,t' - t) + 1(2\,t' - t) + 1(t' - t - 1) = 0 \\ 2(1 + 2\,t' - t) + 2(2\,t' - t) + 1(t' - t - 1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = -\dfrac{5}{2} \\ \\ t' = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

calcolando la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ si ha:

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{raggio minimo richiesto.}$$