Esercizi svolti di trigonometria

Esercizio 1. *Risolvere la seguente equazione:*

$$\sin x - \sqrt{3}\,\cos x = 0\ .$$

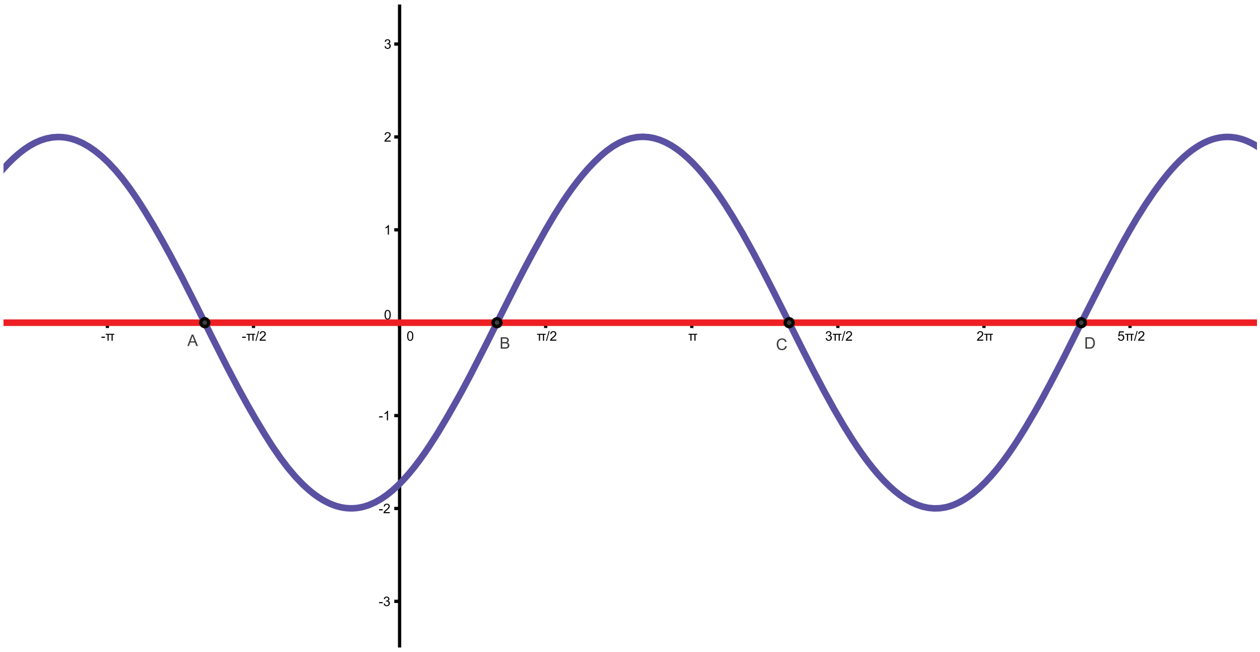
Soluzione. Dividiamo tutto per $\cos x$ (si osservi che risulta $\cos x \neq 0$, dal momento che, se fosse $\cos x = 0$, avremmo $\pm 1 = 0$):

$$\frac{\sin x - \sqrt{3}\,\cos x}{\cos x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3}\,\frac{\cos x}{\cos x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \sqrt{3}\ ;$$

le soluzioni dell'equazione sono, pertanto, le seguenti:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Esercizi svolti di trigonometria

Esercizio 2. *Risolvere la seguente equazione:*

$$3\,\sin x + \sqrt{3}\,\cos x = 0\,.$$

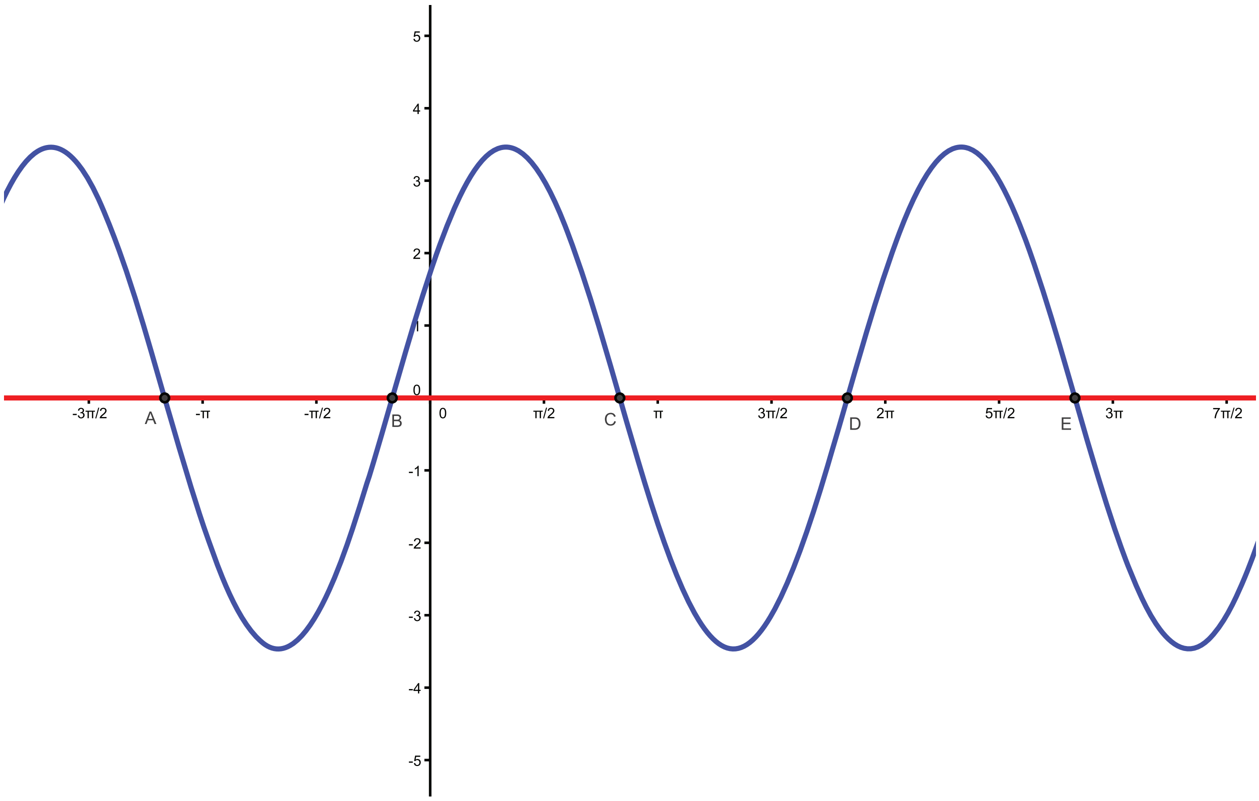
Soluzione. Dividiamo tutto per $\cos x$ (si osservi che risulta $\cos x \neq 0$, dal momento che, se fosse $\cos x = 0$, avremmo $\pm 3 = 0$):

$$\frac{3\,\sin x + \sqrt{3}\,\cos x}{\cos x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}\,\frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$3\,\tan x + \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,;$$

le soluzioni dell'equazione sono, pertanto, le seguenti:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

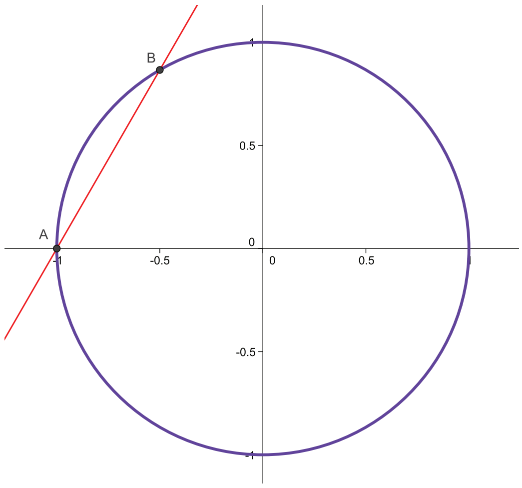


Esercizi svolti di trigonometria

Esercizio 3. *Risolvere l'equazione*

$$\sin x - \sqrt{3}\,\cos x = \sqrt{3}\,.$$

Soluzione (primo metodo). Poniamo $X = \cos x$, $Y = \sin x$ e risolviamo il seguente sistema di secondo grado:



$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y - \sqrt{3}\,X = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} X = -\dfrac{1}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

dobbiamo trovare gli angoli x tali che:

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \pi + 2\,k\pi \quad \cup \quad x = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\pi\,.$$

Soluzione (secondo metodo). Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$, l'equazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{2\,t}{1+t^2} - \sqrt{3}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 2\,t - \sqrt{3}\,(1-t^2) = \sqrt{3}\,(1+t^2) \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{3}$$

quindi $\tan\dfrac{x}{2} = \sqrt{3}$, da cui $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, quindi $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Si osservi ora che dobbiamo analizzare separatamente il caso $x = \pi$ (questo perché $\tan\dfrac{x}{2}$ non è definita per $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$); con tale valore di x, sostituito nell'equazione iniziale, abbiamo:

$$\sin\pi - \sqrt{3}\,\cos\pi = 0 - \sqrt{3}\cdot(-1) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pi \quad \text{è soluzione}\,;$$

in definitiva le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \pi + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,.$$

Soluzione (terzo metodo). Poiché i coefficienti che moltiplicano $\sin x$ e $\cos x$ sono 1 e $-\sqrt{3}$, dividiamo tutta l'equazione per la radice quadrata della somma dei loro quadrati (ovvero per $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$):

$$\frac{1}{2}\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

a questo punto cerchiamo un angolo φ tale che

$$\begin{cases} \cos\varphi = \text{coefficiente di } \cos x \\ \sin\varphi = \text{coefficiente di } \sin x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

non è difficile vedere che $\varphi = \dfrac{5\,\pi}{6}$; a questo punto possiamo riscrivere il primo membro dell'equazione (1) nel modo seguente

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin\varphi\,\sin x + \cos\varphi\,\cos x = \cos(x-\varphi) = \cos\left(x - \frac{5\,\pi}{6}\right)$$

e risolvere l'equazione:

$$\cos\left(x - \frac{5\,\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui ricaviamo

$$x - \frac{5\,\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \quad \cup \quad x - \frac{5\,\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\ ;$$

quindi, in definitiva, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$x = \pi + 2\,k\pi \quad \cup \quad x = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\pi\ .$$

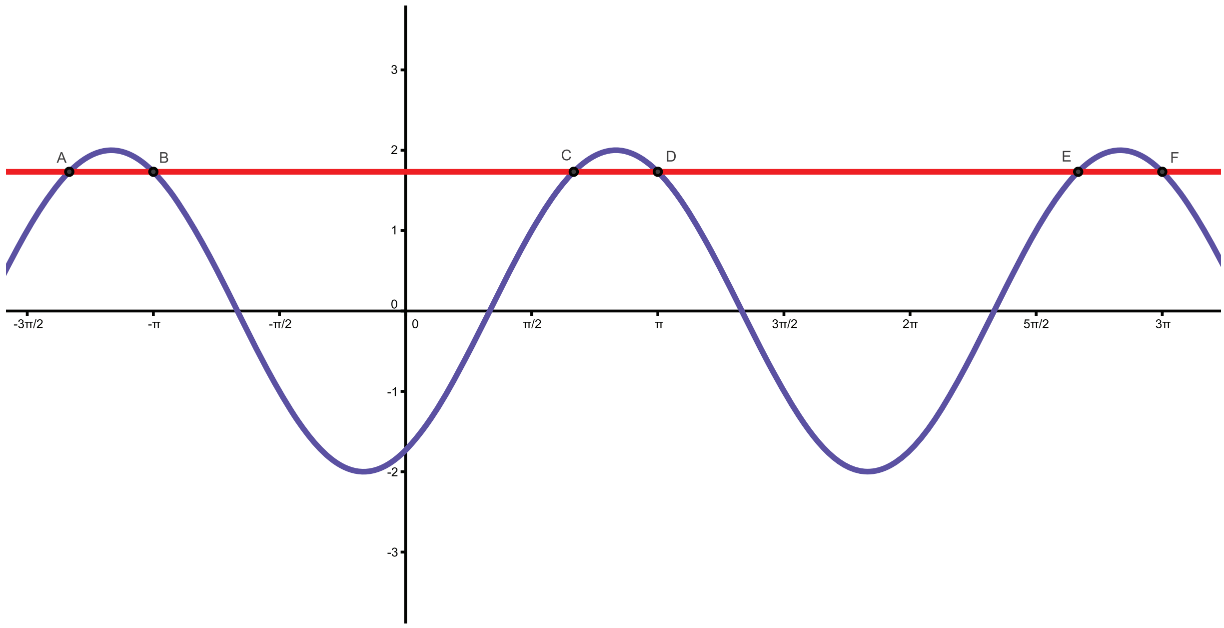


Figura 1: Grafico delle funzioni $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\,\cos x$ e $g(x) = \sqrt{3}$.