Liceo “Falchi” Montopoli in Val d’Arno - Classe 5^aI - Francesco Daddi - 30 gennaio 2010

Esercizi sullo studio di una funzione razionale fratta

Esercizio 1. Determina il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-5\,x+4}$.

Esercizio 2. Studia la disequazione $\dfrac{1-x^2}{4-x} > 0$.

Esercizio 3. Trova gli zeri della funzione $f(x) = \dfrac{3\,x-x^2-2}{x^2-9}$.

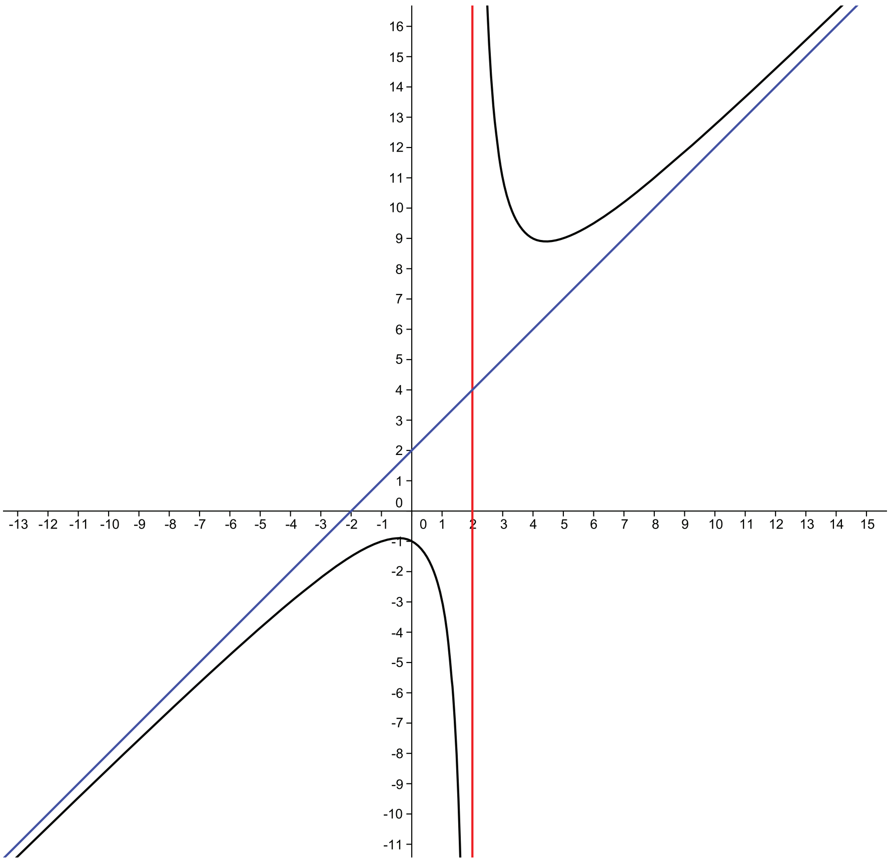
Esercizio 4. Determina gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \dfrac{2+3\,x}{2\,x^2-50}$.

Esercizio 5. Determina l’asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{2\,x^2+x-5}{x+2}$.

Esercizio 6. Determina l’asintoto orizzontale della funzione $f(x) = \dfrac{2\,x^2+6\,x-4}{x-4\,x^2+3}$.

Esercizio 7. Determina l’intersezione della funzione $f(x) = \dfrac{3\,x^2+x-6}{x-2}$ con l’asse y .

Esercizio 8. Quale potrebbe essere l’espressione analitica della funzione il cui grafico è riportato nella figura? Scrivi anche l’equazione dell’asintoto obliquo.

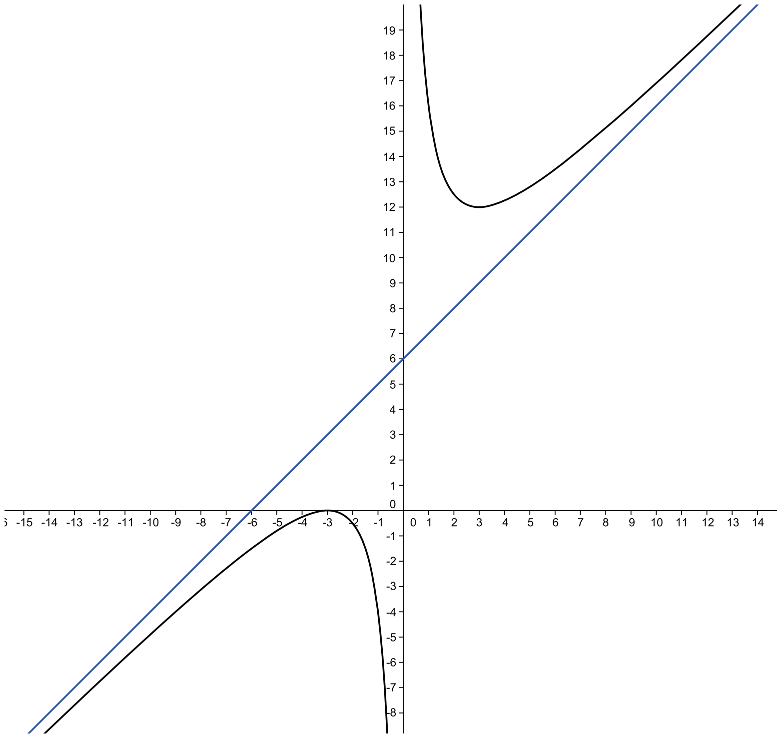


Esercizio 9. Studia la funzione $\dfrac{x^2+6\,x+9}{x}$.

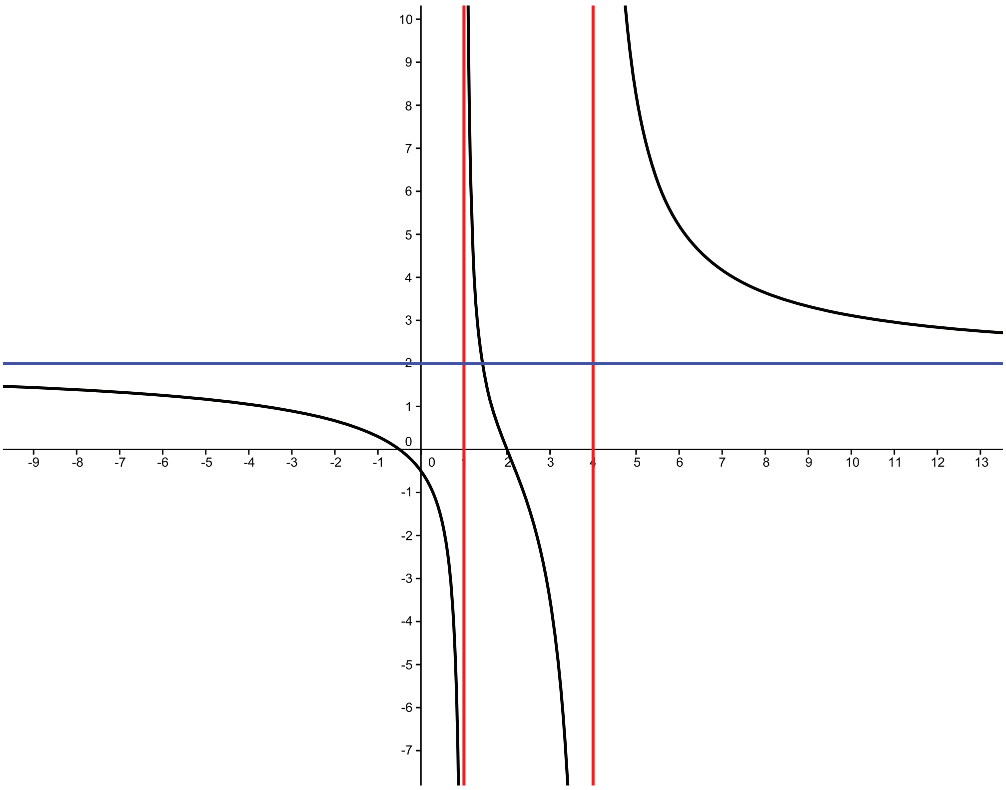
Esercizio 10. Studia la funzione $\dfrac{2\,x^2-3\,x-2}{x^2-5\,x+4}$.

Soluzione degli esercizi del 30 gennaio 2010

Esercizio 1. $D_f = \{x \neq 1 \wedge x \neq 4\}$ **Esercizio 2.** $\dfrac{1-x^2}{4-x} > 0 \ \Rightarrow \ \{-1 < x < 1\} \cup \{x > 4\}$
Esercizio 3. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. **Esercizio 4.** Gli asintoti verticali hanno equazione $x = -5$ e $x = 5$.
Esercizio 5. L’asintoto obliquo ha equazione $y = 2\,x - 3$. **Esercizio 6.** L’asintoto orizz. ha equaz. $y = -\frac{1}{2}$.
Esercizio 7. L’intersezione con l’asse y si trova ponendo $x = 0$: $f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 0 - 6}{0 - 2} = \frac{-6}{-2} = 3$; il punto di intersezione è $P(0\,;\,3)$. **Esercizio 8.** La funzione ha equazione $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$. L’asintoto obliquo (era disegnato nel grafico) ha equazione $y = x + 2$. **Esercizio 9.** Ecco il grafico della funzione $\frac{x^2+6\,x+9}{x}$:



Esercizio 10. Ecco il grafico della funzione $\frac{2\,x^2-3\,x-2}{x^2-5\,x+4}$:



Francesco Daddi - Esercizi 5I - 18 febbraio 2010

Liceo "Falchi" Montopoli in Val d'Arno

1. Determinare il dominio della funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{16-4x^2}$.

2. Determinare gli asintoti verticali e l'asintoto orizzontale della funzione $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{6x-x^2-5}$.

3. Determina l'asintoto obliquo della funzione $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{5-x}$.

4. Dire se la funzione $f(x)=\begin{cases}3x-1 & se \;\; x\leq 1\\ x^2+1 & se \;\; x>1\end{cases}$ è continua.

5. Che tipo di discontinuità presenta la funzione $f(x)=\begin{cases}1-x & se \;\; x\leq -2\\ 2+x & se \;\; x>-2\end{cases}$?

6. Determina gli eventuali punti di discontinuità della funzione

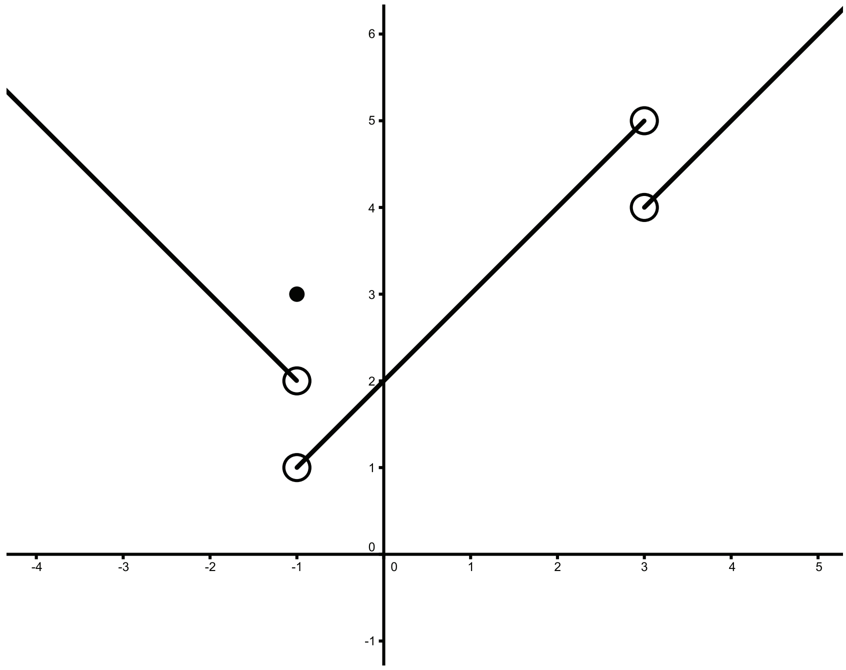
$$f(x)=\begin{cases}1-x & se \;\; x<-1\\ 3 & se \;\; x=-1\\ 2+x & se \;\; -1<x<3\\ x+1 & se \;\; x>3\end{cases}$$

7. Determina gli eventuali punti di discontinuità della funzione

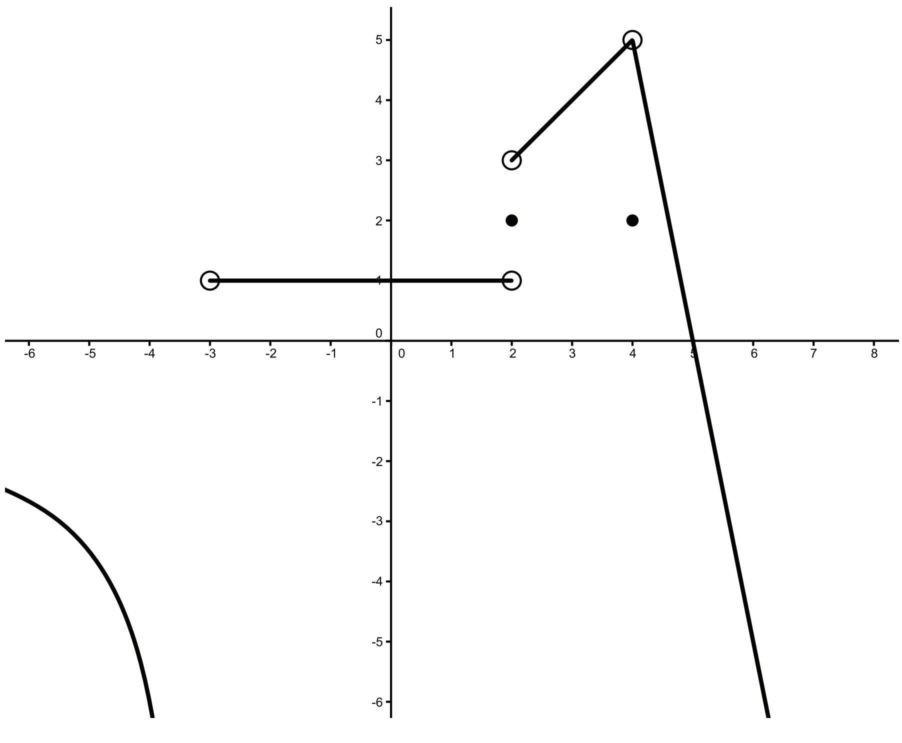
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x}{x+3} & se \;\; x<-3\\ 1 & se \;\; -3<x<2\\ 2 & se \;\; x=2\\ x+1 & se \;\; 2<x<4\\ 2 & se \;\; x=4\\ 25-5x & se \;\; x>4\end{cases}$$

Soluzione degli esercizi del 18 febbraio 2010 - Classe 5i - Prof. Francesco Daddi

1. Il dominio della funzione è $D_f = \{x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$.
2. Gli asintoti verticali sono $x=1$ e $x=5$. L'asintoto orizzontale è $y=-1$.
3. L'asintoto obliquo ha equazione $y=-x-7$.
4. La funzione è continua; infatti abbiamo $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$.
5. La funzione presenta una discontinuità di prima specie in $x=-2$; infatti risulta $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$; il salto è pari a 3.
6. La funzione presenta una discontinuità di prima specie in $x=-1$: si ha $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ per cui il salto è pari a 1. Anche in $x=3$ si ha una discontinuità di prima specie: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 5$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$ e anche qui il salto è pari a 1.



7. La funzione presenta una discontinuità di seconda specie in $x=-3$ in quanto risulta $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$. In $x=2$ si ha una discontinuità di prima specie: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ (il salto è 2). In $x=4$ la funzione presenta una discontinuità di terza specie in quanto $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 5$ ma $f(4) = 2 \neq 5$. Osserviamo che si tratta di una discontinuità eliminabile in quanto è possibile **ridefinire** la funzione in $x=4$ nel modo seguente: $f(4)=5$.



Esercizi sulle funzioni - Classe 5i - Prof. Francesco Daddi (25/02/2010)

1. Studiare la seguente funzione: $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-x-6}$.

2. Studiare la seguente funzione: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-4}$.

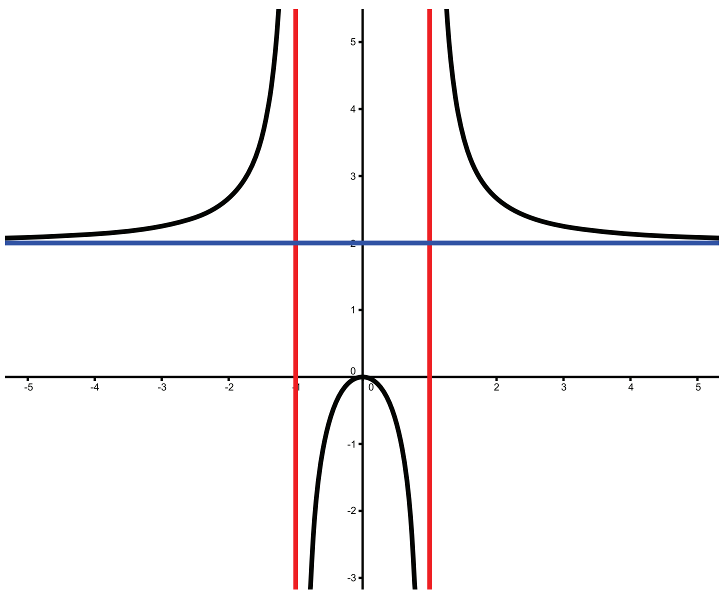
3. Studiare gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione: $f(x)=\begin{cases} x+2 & se \quad x<-1 \\ x^2 & se \quad x>-1 \end{cases}$

4. Studiare gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione: $f(x)=\begin{cases} x+2 & se \quad x<-1 \\ 3 & se \quad x=-1 \\ x^2 & se \quad x>-1 \end{cases}$

5. Studiare gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione: $f(x)=\begin{cases} x+2 & se \quad x<-1 \\ 1 & se \quad x=-1 \\ x^2 & se \quad x>-1 \end{cases}$

6. Studiare gli eventuali punti di discontinuità della seguente funzione: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & se \quad x<2 \\ 3 & se \quad x=2 \\ 1-x & se \quad 2<x\leq 4 \\ x-1 & se \quad x>4 \end{cases}$

7. Facendo riferimento alla figura a fianco indicare una possibile espressione analitica della funzione.



8. Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{x-3}$.

9. Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2-3x^2}{x+1}$.

10. Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{x^2+x-6}$.

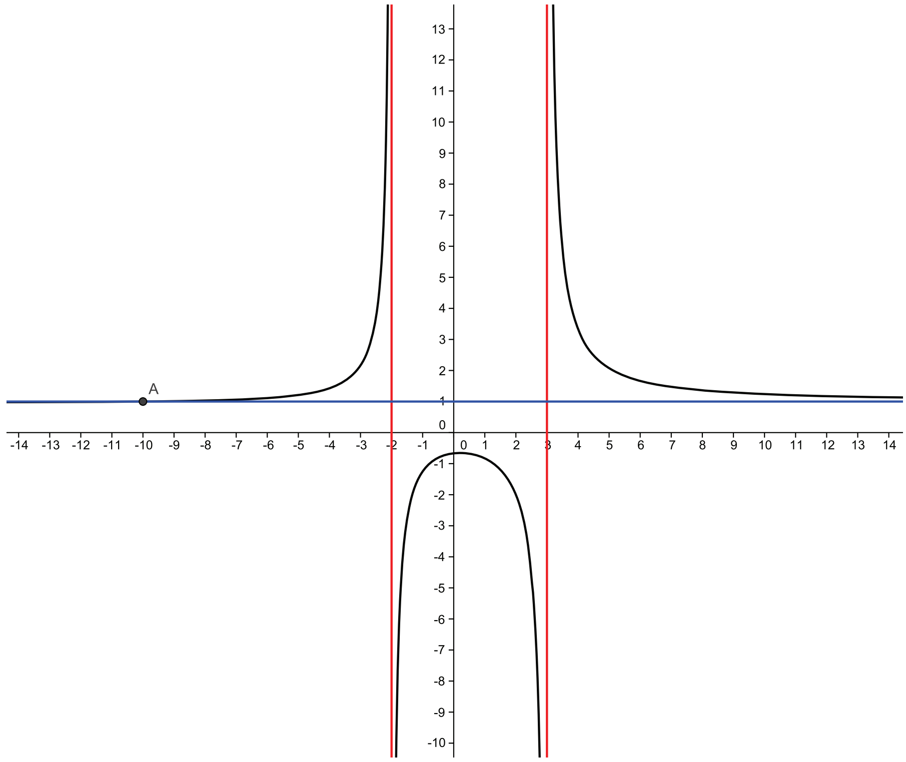
11. Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{2x-x^2+24}$.

Soluzione degli esercizi assegnati il 25 febbraio 2010

Prof. Francesco Daddi

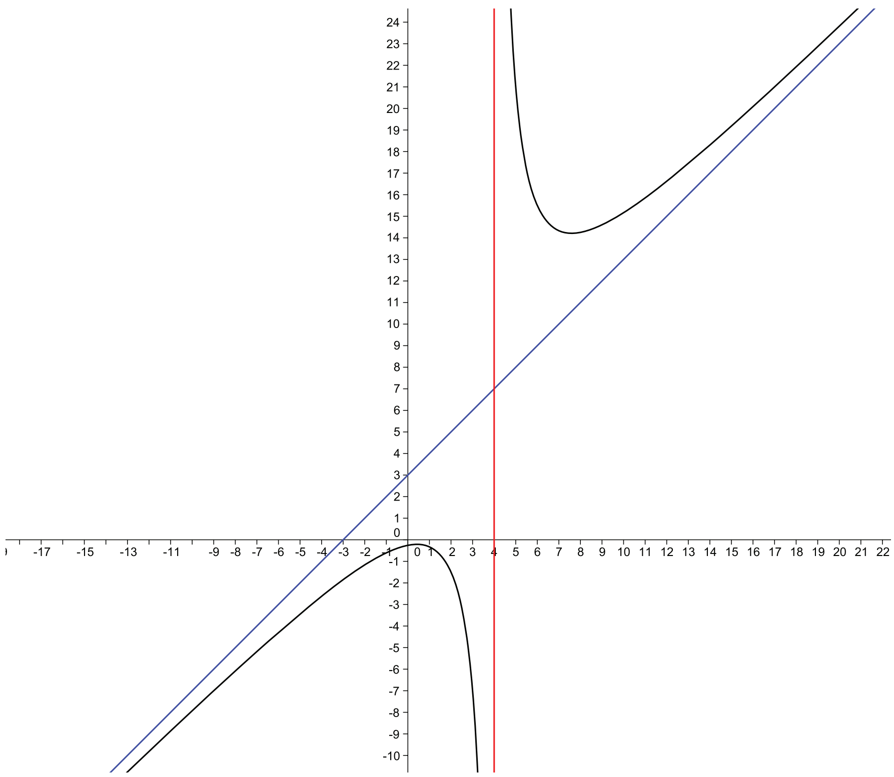
1. Nella figura a fianco è rappresentato il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-x-6}$.

   La funzione non ha zeri. Si osservi inoltre che la funzione ha i seguenti asintoti verticali: $x=-2$ e $x=3$; ha inoltre un asintoto orizzontale, di equazione $y=1$. La funzione interseca l'asintoto orizzontale nel punto $A(-10;1)$.



2. Nella figura a fianco è rappresentato il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-4}$.

   Si osservi che la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x=4$ e un asintoto obliquo di equazione $y=x+3$.



3. La funzione presenta una discontinuità di terza specie in $x=-1$ in quanto il limite sinistro e il limite destro sono finiti e coincidono $\left(\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=1\right)$, ma la funzione non è definita in $x=-1$.

4. La funzione presenta una discontinuità di terza specie in $x=-1$ in quanto il limite sinistro e il limite destro sono finiti e coincidono $\left(\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=1\right)$, ma $f(-1)=3\neq 1$.

5. La funzione è ***continua in*** $x=-1$ in quanto si ha $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)=1$ (in questo caso coincidono il limite sinistro, il limite destro e il valore della funzione in $x=-1$).

6. La funzione presenta una discontinuità di seconda specie in $x=2$ in quanto $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$.

   La funzione presenta inoltre una discontinuità di prima specie in $x=4$ in quanto risulta $\lim_{x\to4^-} f(x)=-3$ e $\lim_{x\to4^+} f(x)=3$: si ha un salto pari a 6.

7. Una possibile espressione analitica della funzione è $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

8. $\lim_{x\to3^+}\dfrac{x-2}{x-3}=+\infty$

9. $\lim_{x\to-1^+}\dfrac{2-3x^2}{x+1}=-\infty$

10. $\lim_{x\to2^-}\dfrac{x+3}{x^2+x-6}=-\infty$

11. $\lim_{x\to-4^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{2x-x^2+24}=+\infty$