Esercizio svolto sul moto di caduta di un grave

Un grave viene lanciato da un'altezza di 3 m verso l'alto con velocità iniziale pari a 6 m/s. Si determini:
a) la quota massima raggiunta e il tempo impiegato per raggiungerla;
b) il tempo che impiega a raggiungere il suolo;
c) la velocità di impatto con il suolo.
Si tracci il grafico posizione-tempo, il grafico velocità-tempo ed il grafico accelerazione-tempo.

Soluzione. a) La legge oraria del grave è $y = 3 + 6\,t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8)\,t^2$, mentre per la velocità abbiamo $v = 6 + (-9,8) \cdot t$. Per determinare la quota massima raggiunta sfruttiamo la formula $v_f^2 - v_i^2 = 2(-g)(y - y_0)$, osservando che quando il grave raggiunge la quota massima y_{max} la sua velocità è nulla:

$$(0\ m/s)^2 - (6\ m/s)^2 = 2 \cdot (-9,8\ m/s^2) \cdot (y_{max} - 3\ m) \quad \Rightarrow \quad y_{max} \approx 4,84\ m\ .$$

Il tempo impiegato per raggiungere tale quota massima si ottiene dalla formula per la velocità ($v = 6 + (-9,8) \cdot t$) ponendo semplicemente $v = 0$:

$$0\ m/s = 6\ m/s + (-9,8\ m/s^2) \cdot t \quad \Rightarrow \quad t \approx 0,61\ s\ .$$

Possiamo ritrovare la quota massima sostituendo il valore ottenuto per t nella legge oraria $y = 3 + 6\,t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8)\,t^2$:

$$y_{max} = 3\ m + (6\ m/s) \cdot (0,61\ s) + \frac{1}{2} \cdot (-9,8\ m/s^2) \cdot (0,61\ s)^2 \approx 4,84\ m\ .$$

b) Quando il grave giunge al suolo abbiamo $y = 0\ m$, quindi:

$$0\ m = 3\ m + (6\ m/s) \cdot t - 0,5 \cdot (9,8\ m/s^2) \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 1,61\ s \ \text{ (la soluzione negativa va scartata!)}$$

c) Primo metodo. Sfruttando la formula $v_f^2 - v_i^2 = 2(-g)(y - y_0)$ abbiamo:

$$v_f = -\sqrt{(6\ m/s)^2 + 2 \cdot (-9,8\ m/s^2)(0\ m - 3\ m)} \approx -9,74\ m/s$$

Secondo metodo. Sostituendo il tempo $t = 1,61\ s$ nell'equazione della velocità ($v = 6 + (-9,8) \cdot t$) troviamo:

$$v = 6\ m/s + (-9,8\ m/s^2) \cdot (1,61\ s) \approx -9,78\ m/s\ .$$

Abbiamo trovato due risultati diversi ($-9,74\ m/s$ contro $-9,78\ m/s$): con il secondo metodo abbiamo sfruttato il tempo $t \approx 1,61\ s$, ottenuto in precedenza; con il primo metodo, invece, abbiamo sfruttato **solo** i dati del problema.

Grafico posizione-tempo:

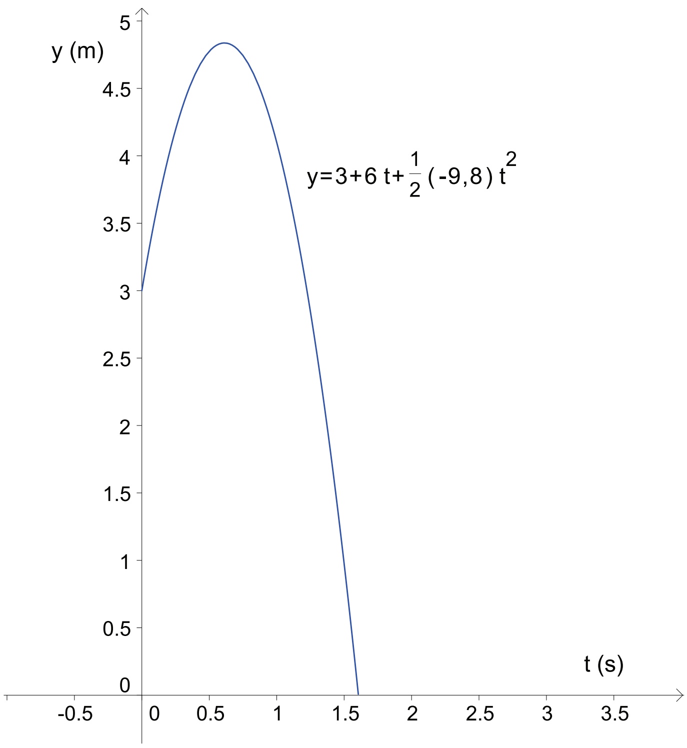


Grafico velocità-tempo:

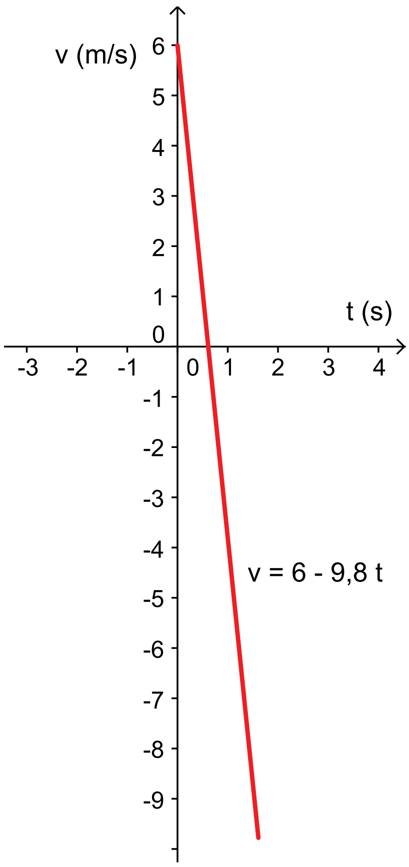
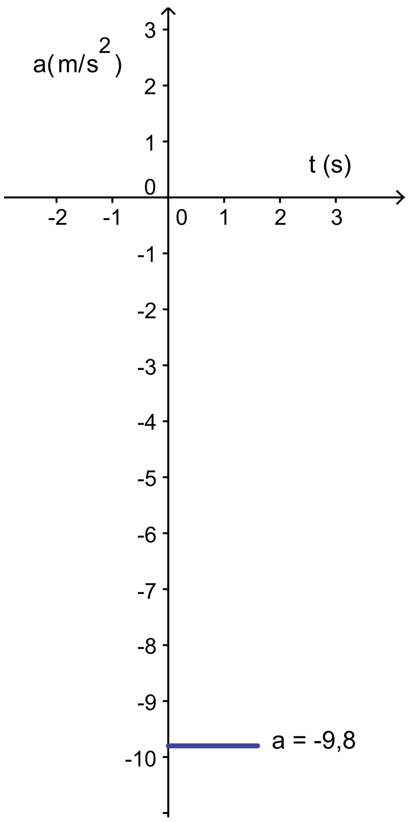


Grafico accelerazione-tempo:



Esercizio svolto sulla misura di g

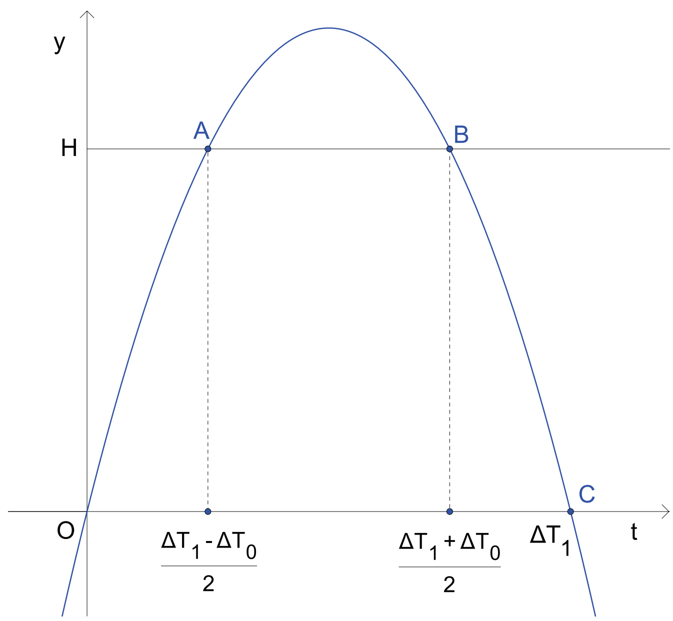
Al laboratorio nazionale di fisica in Inghilterra è stata fatta una misura di g lanciando verticalmente verso l'alto una sfera di vetro nel vuoto all'interno di una torre e lasciandola ricadere. Indichiamo con ΔT_0 l'intervallo di tempo fra i due passaggi della sfera a un livello superiore, con ΔT_1 l'intervallo di tempo fra i due passaggi ad un livello inferiore e con H la distanza fra i due livelli; dimostrare che $g = \dfrac{8\,H}{\Delta T_1^2 - \Delta T_0^2}$.

Soluzione. Per prima cosa scegliamo l'origine dei tempi e delle posizioni in corrispondenza del primo passaggio dal livello inferiore; la legge oraria, con questa scelta, risulta essere:

$$y = k\,t + \gamma\,t^2 \; ; \tag{1}$$

nel grafico posizione-tempo abbiamo quindi una parabola che, oltre a passare per l'origine, passa anche per i punti

$$A\left(\frac{\Delta T_1 - \Delta T_0}{2} \,;\, H\right) \quad ; \quad B\left(\frac{\Delta T_1 + \Delta T_0}{2} \,;\, H\right) \quad ; \quad C(\Delta T_1 \,;\, 0) \; ;$$



considerando solo il passaggio per i due punti A e C (la parabola, infatti, passerà automaticamente anche dal punto B) si arriva al seguente sistema:

$$\begin{cases} H = k\left(\dfrac{\Delta T_1 - \Delta T_0}{2}\right) + \gamma\left(\dfrac{\Delta T_1 - \Delta T_0}{2}\right)^2 \\ 0 = k\,\Delta T_1 + \gamma(\Delta T_1)^2 \end{cases}$$

risolvendo il sistema rispetto alle incognite k e γ otteniamo

$$k = \frac{4\,H\Delta T_1}{\Delta T_1^2 - \Delta T_0^2} \quad ; \quad \gamma = -\frac{4\,H}{\Delta T_1^2 - \Delta T_0^2} \; .$$

Poiché risulta $\gamma = -\dfrac{1}{2}\,g$ possiamo ricavare l'espressione per g:

$$g = -2\,\gamma \quad \Rightarrow \quad g = \frac{8\,H}{\Delta T_1^2 - \Delta T_0^2} \; .$$

Osservazione. L'espressione trovata per k indica la velocità della sfera al passaggio dal livello inferiore.