

Esercizi svolti sui limiti - 7 aprile 2010 - Francesco Daddi

1) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12}$. **Soluzione.** Sostituendo $x=3$ otteniamo $\frac{0}{0}$; possiamo quindi semplificare la frazione algebrica scomponendo il numeratore e il denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x-1)}{4(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{4}$$
 a questo punto, sostituendo di nuovo $x=3$, otteniamo $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$.

2) Calcolare $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 3x - 14}{3x^2 + x - 10}$. **Soluzione.** Sostituendo $x=-2$ otteniamo $\frac{0}{0}$; possiamo quindi semplificare la frazione algebrica scomponendo il numeratore e il denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 3x - 14}{3x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2(x+2)\left(x - \frac{7}{2}\right)}{3(x+2)\left(x - \frac{5}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2\left(x - \frac{7}{2}\right)}{3\left(x - \frac{5}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-7}{3x-5}$$
 sostituendo di nuovo $x=-2$, otteniamo $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-7}{3x-5} = \frac{2 \cdot (-2) - 7}{3 \cdot (-2) - 5} = \frac{-11}{-11} = 1$.

3) Calcolare $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{3x - 2x^2 + 44}{3x^2 + 13x + 4}$. **Soluzione.** Sostituendo $x=-4$ otteniamo $\frac{0}{0}$; possiamo quindi semplificare la frazione algebrica scomponendo il numeratore e il denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{3x - 2x^2 + 44}{3x^2 + 13x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-2(x+4)\left(x - \frac{11}{2}\right)}{3(x+4)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-2\left(x - \frac{11}{2}\right)}{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-2x+11}{3x+1}$$
 sostituendo di nuovo $x=-4$, otteniamo $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{-2x+11}{3x+1} = \frac{-2 \cdot (-4) + 11}{3 \cdot (-4) + 1} = \frac{19}{-11} = -\frac{19}{11}$.

4) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{36 - 9x^2}{3x^2 - 12x + 12}$. **Soluzione.** Sostituendo $x=2$ otteniamo $\frac{0}{0}$; possiamo quindi semplificare la frazione algebrica scomponendo il numeratore e il denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{36 - 9x^2}{3x^2 - 12x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-9(x-2)(x+2)}{3(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3(x+2)}{x-2}$$
 a questo punto possiamo sostituire di nuovo $x=2$, ottenendo $\frac{-12}{0}$. Il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$; per determinare il risultato è sufficiente studiare il segno del denominatore in un intorno destro di $x=2$ (si osservi che si tratta di un limite destro): in tale intorno il segno del denominatore è positivo, quindi la frazione è negativa (si tenga presente che a numeratore c'è -12) per cui possiamo scrivere $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3(x+2)}{x-2} = -\infty$.

5) Calcolare $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{200x^2 - 200x + 50}{100x - 200x^2}$. **Soluzione.** Sostituendo $x=\frac{1}{2}$ otteniamo $\frac{0}{0}$; possiamo quindi semplificare la frazione algebrica scomponendo il numeratore e il denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{200x^2 - 200x + 50}{100x - 200x^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{200\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{-200x\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x - \frac{1}{2}}{-x}$$
 a questo punto basta sostituire di nuovo $x=\frac{1}{2}$, ottenendo così $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x - \frac{1}{2}}{-x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0$.