Istituto Statale d'Arte - Classe 3A

Appunti sulla lezione del 16/11/06

Due fidanzati abitano a 20 Km l'uno dall'altra; decidono di incontrarsi lungo la strada che collega le due case, dirigendosi uno verso l'altra.
Il fidanzato percorre la strada a 10 Km/h e la sua ragazza a 5 Km/h. Le velocità sono costanti: si tratta di due moti rettilinei uniformi.

- dopo quanta strada si incontreranno?
- dopo quanto tempo?

Scegliamo ora come origine (cioè come "kilometro zero") della strada la casa del fidanzato e come verso positivo quello che parte dalla casa del fidanzato e arriva alla casa della fidanzata (si veda la figura 1):

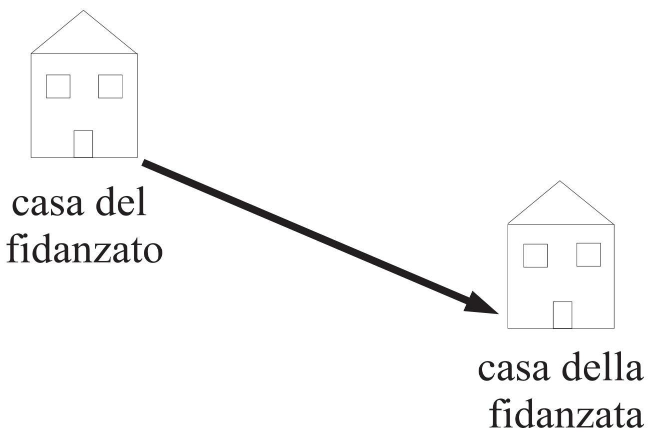

Figura 1: Il verso positivo è quello che parte dalla casa del fidanzato e arriva a quella della fidanzata.

Ragioniamo nel modo seguente:

- dopo 1 ora il fidanzato ha percorso 10 Km (la sua velocità è uguale, infatti, proprio a 10 Km/h) e la fidanzata ha percorso 5 Km (velocità uguale a 5 Km/h);
- la ragazza sta percorrendo la strada in senso opposto a quello del suo ragazzo: rispetto al verso scelto come positivo (cioè a quello che parte dalla casa di lui e arriva alla casa di lei) la fidanzata ha una velocità negativa;
- all'istante iniziale la ragazza si trova, sempre prendendo come riferimento della strada la casa di lui, a 20 Km dall'origine.

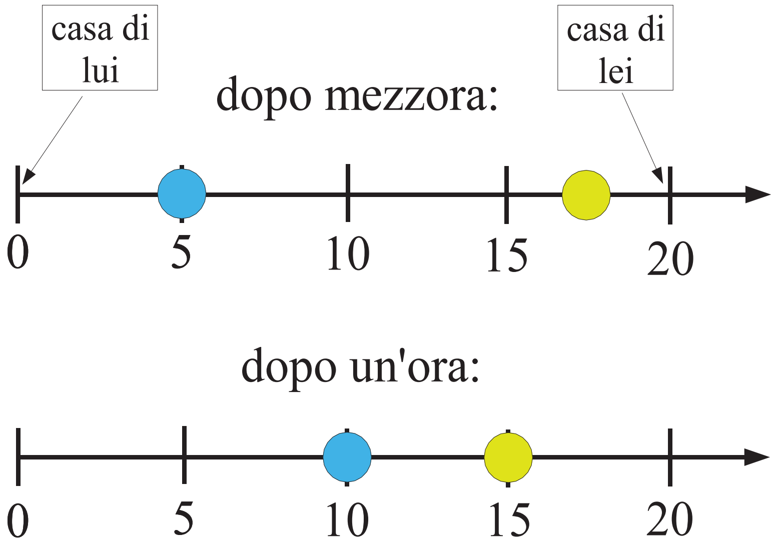

Figura 2: Strada percorsa dai due fidanzati dopo mezzora e dopo un'ora.

Nella figura 2 viene visualizzata la situazione dopo mezzora e dopo un'ora; si osserva facilmente che la distanza dei due fidanzati diminuisce nel tempo fino a ridursi a zero nell'istante in cui si incontrano (vedere la figura 3). E' molto importante fare una stima qualitativa della soluzione: dai dati del problema possiamo affermare che i due fidanzati si incontreranno dopo un'ora e il punto di incontro sarà più vicino alla casa di lei perché lui tiene una velocità più elevata. Se le due velocità fossero uguali, essi si troverebbero esattamente a metà strada.

Possiamo inoltre dire che, ***se le velocità dei due sono "sbilanciate" (ovvero se una delle due velocità è molto più grande dell'altra), il punto di incontro sarà molto vicino alla casa della persona che ha la velocità più bassa e tanto più vicino quanto maggiore è lo "sbilanciamento".***

Passiamo ora dallo studio *qualitativo* a quello *quantitativo*:
la legge oraria del fidanzato è

$$s = 10 \cdot t \tag{1}$$

mentre ***la legge oraria della fidanzata*** è

$$s = 20 - 5 \cdot t \tag{2}$$

I due diagrammi spazio-temporali sono rappresentati nella figura 4, in cui le scale scelte non sono uguali. Si nota che le due rette hanno i due coefficienti angolari di segno opposto: questo è un fatto generale perché, ***ogni volta che studiamo il moto di due corpi che si stanno avvicinando "venendosi incontro", le rette che rappresentano i due moti hanno coefficienti angolari di segno discorde.*** In presenza invece di "inseguimenti" le rette hanno pendenze dello stesso segno.

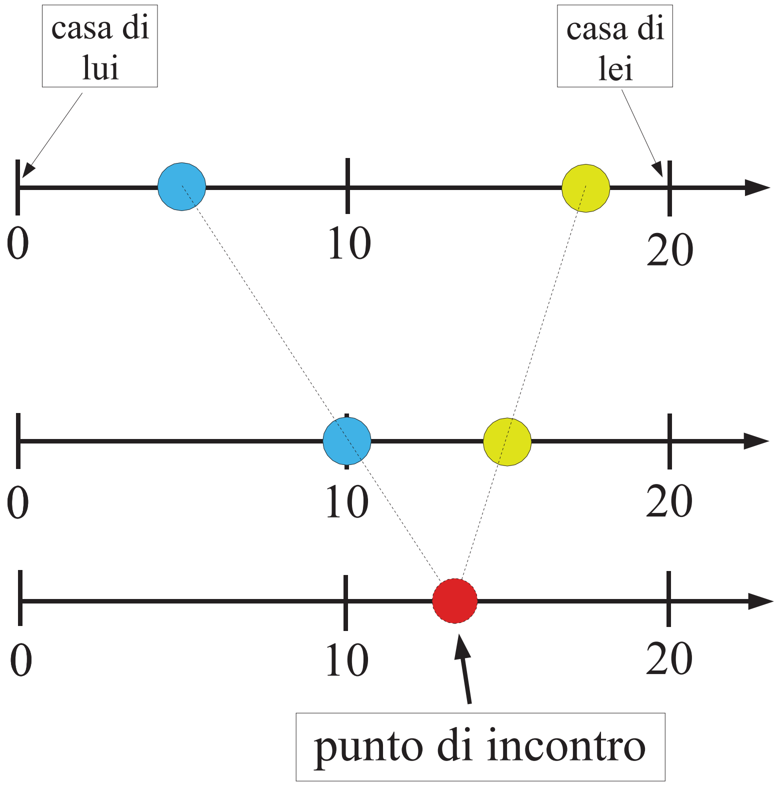

Figura 3: Costruzione del punto di incontro dei due fidanzati.

Cercando analiticamente le coordinate del punto di intersezione troviamo:

$$\begin{cases} s = 10 \cdot t \\ s = 20 - 5 \cdot t \end{cases} \Longrightarrow \quad 10 \cdot t = 20 - 5 \cdot t \quad \Longrightarrow \quad 15t = 20 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{4}{3}\ \mathrm{h}\,.$$

L'ascissa del punto di intersezione ci dice dopo quanto tempo si incontrano i due fidanzati; l'ordinata ci dirà a quale Km si incontrano:

$$s = 10 \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{3}\ \mathrm{Km} \simeq 13,3\ \mathrm{Km}\,;$$

questo risultato non ci soprende perché avevamo già analizzato la situazione da un punto di vista qualitativo ed avevamo già concluso che il punto di incontro si sarebbe dovuto trovare più vicino alla casa della ragazza (per la precisione questo punto si trova a $(20-13,3)$ Km $\simeq$ 6,7 Km dalla casa di lei).

Altra osservazione: visto che la velocità di lui è il doppio della velocità di lei, sappiamo che lo spazio percorso dal fidanzato sarà il doppio dello spazio percorso dalla ragazza. Vediamo numericamente che le cose stanno proprio così:

$$\begin{cases} \text{spazio percorso da lui} \simeq 13,3\ \mathrm{Km} \\ \text{spazio percorso da lei} \simeq 6,7\ \mathrm{Km} \end{cases} \Longrightarrow \quad 13,3 \simeq 2 \cdot 6,7$$

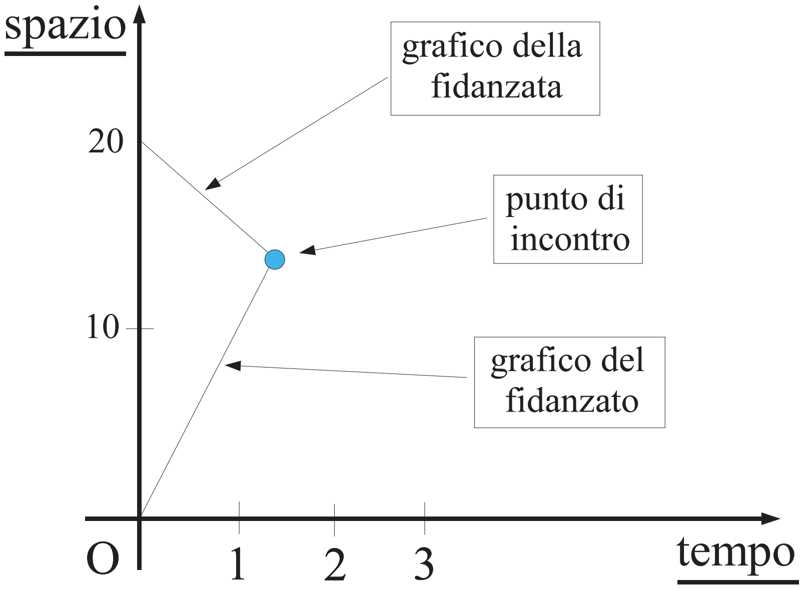

Figura 4: Diagrammi spazio-tempo dei due fidanzati. Gli spazi sono misurati in Km, i tempi in ore.

Osservazione. Cosa significano $\frac{4}{3}$ h? Ragioniamo: se dividiamo un'ora in tre parti uguali otteniamo 20 minuti e, se di queste parti ne prendiamo quattro (come indicato dalla frazione in oggetto) il tempo incognito è pari a 80 minuti. In modo del tutto equivalente possiamo dire che i due fidanzati si incontrano dopo 1 ora e 20 minuti.

In generale, se t è il tempo trovato in ore, per esprimere il risultato in ore e minuti possiamo operare nel modo seguente:

1. separiamo la parte intera *p.i.* e la parte decimale *p.d.* del numero t e consideriamo solo quest'ultima;

2. moltiplichiamo per 60 la parte decimale *p.d.*;

3. il risultato è equivalente a *p.i.* ore e $(60 \cdot p.d.)$ minuti

Esempio numerico. Se il risultato è pari a $t = 2,43$ h, procediamo nel seguente modo:

1. separiamo la parte intera (2) e la parte decimale (0,43) del numero t;

2. moltiplichiamo per 60 la parte decimale: $60 \cdot 0,43 = 25,8$;

3. il risultato ***approssimato*** espresso in ore e minuti è: $t = 2$ ore e 26 minuti.

Cambiamo i dati del problema.

Consideriamo questi dati più "sbilanciati" dei precedenti (le case distano sempre 20 Km):

- Velocità del fidanzato = 30 Km/h
- Velocità della fidanzata = 2 Km/h

La legge oraria del ragazzo è

$$s = 30 \cdot t$$

mentre la legge oraria della ragazza è

$$s = 20 - 2 \cdot t$$

le coordinate spazio-temporali del punto di incontro sono:

$$\begin{cases} s = 30 \cdot t \\ \\ s = 20 - 2 \cdot t \end{cases} \implies 30 \cdot t = 20 - 2 \cdot t \implies 32t = 20 \implies t = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} \simeq 0,63 \text{ h}$$

che in ore e minuti corrispondono circa a 0 ore e 38 minuti.

Il punto della strada in cui si incontrano si ricava sostituendo il valore di t nella prima equazione:

$$s = 30 \cdot t = 30 \cdot \frac{5}{8} = \frac{150}{8} = \frac{75}{4} \simeq 18,76 \text{ Km.}$$

Come si può osservare facilmente il punto geometrico d'incontro si trova molto più vicino alla casa di lei (la velocità è "sbilanciata" a favore di lui).

Mantenendo uguale a 2 Km/h la velocità della ragazza e aumentando sempre di più la velocità del fidanzato si ottiene lo schema seguente (si noti quanto il punto di incontro si avvicini sempre più alla casa di lei):

Velocità	Tempo impiegato	Spazio percorso
10 Km/h	1,67 h	16,7 Km
20 Km/h	0,91 h	18,2 Km
30 Km/h	0,63 h	18,8 Km
40 Km/h	0,48 h	19,0 Km
50 Km/h	0,38 h	19,2 Km
60 Km/h	0,32 h	19,4 Km
70 Km/h	0,28 h	19,4 Km
80 Km/h	0,24 h	19,5 Km
90 Km/h	0,22 h	19,6 Km
100 Km/h	0,20 h	19,6 Km
⋮	⋮	⋮
150 Km/h	0,13 h	19,7 Km
300 Km/h	0,07 h	19,9 Km

Istituto Statale d'Arte

Classe 3A - 21/11/06

Diagrammi sui moti rettilinei uniformi

1) Problema di due corpi che si vengono incontro.

Sia d la distanza iniziale tra i due corpi; sia v_1 la velocità del corpo A e v_2 la velocità del corpo B. Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} s = v_1 \cdot t \\ s = d - v_2 \cdot t \end{cases}$$

Esempio numerico. Sia $d = 20$ metri; se $v_1 = 7$ m/s e $v_2 = 3$ m/s il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} s = 7 \cdot t \\ s = 20 - 3 \cdot t \end{cases}$$

la soluzione è:

$$7 \cdot t = 20 - 3 \cdot t \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot t + 3 \cdot t = 20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 10 \cdot t = 20 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{20}{10} = 2 \text{ secondi.} \quad \Rightarrow \quad s = 7 \cdot 2 = 14 \text{ metri.}$$

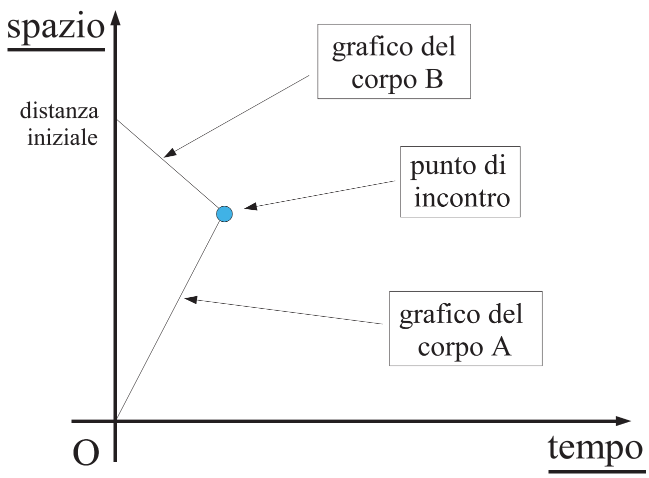

Figura 1: Diagrammi spazio-temporali di due corpi che si vengono incontro.

2) Problema di due corpi che vanno nella stessa direzione.

Sia d la distanza iniziale tra i due corpi; sia v_1 la velocità del corpo A e v_2 la velocità del corpo B. Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} s = v_1 \cdot t \\ s = d + v_2 \cdot t \end{cases}$$

Esempio numerico. Sia $d = 135$ metri; se $v_1 = 39$ m/s e $v_2 = 9$ m/s il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} s = 39 \cdot t \\ s = 135 + 9 \cdot t \end{cases}$$

la soluzione è:

$$39 \cdot t = 135 + 9 \cdot t \quad \Rightarrow \quad 39 \cdot t - 9 \cdot t = 135 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 30 \cdot t = 135 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{135}{30} = 4{,}5 \text{ secondi.} \quad \Rightarrow \quad s = 39 \cdot 4,5 = 175,5 \text{ metri.}$$

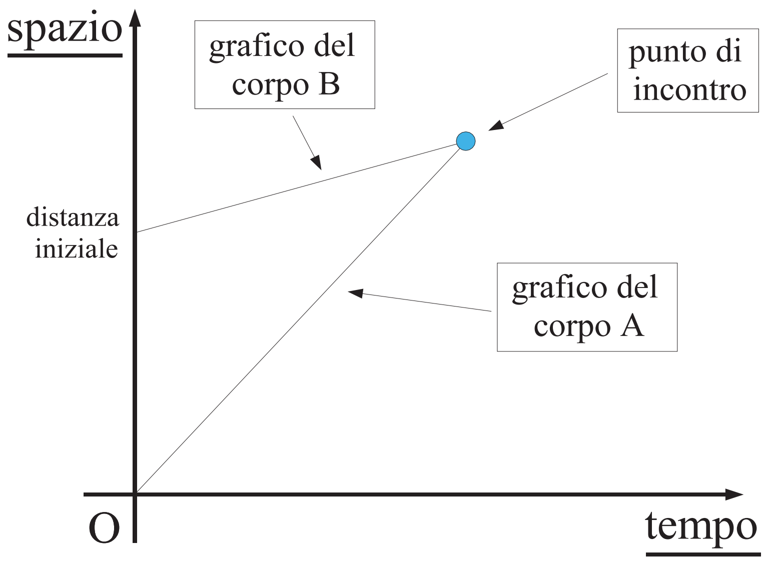

Figura 2: Diagrammi spazio-temporali di due corpi che sono diretti nella stessa direzione.

Osservazione. Fissata la distanza d, se le due velocità sono molto vicine il punto di intersezione nel piano spazio-tempo si troverà molto lontano dall'origine e tanto più lontano quanto più sono vicini i valori delle due velocità. Ad esempio, prendendo $d = 6$ metri, $v_1 = 10,01$ m/s e $v_2 = 10$ m/s si trova come soluzione $t = 600$ secondi (cioè 10 minuti per colmare un distacco di soli 6 metri!) e $s = 6006$ metri (il corpo A percorre oltre 6 km prima di raggiungere B).