Liceo "Carducci" Volterra - Classi 1A, 1B Scientifico - Francesco Daddi - 23 febbraio 2009

Esercizi guidati sulle tecniche di fattorizzazione

Gli asterischi indicano la difficoltà degli esercizi.

Esercizio 1. (*) Fattorizza il polinomio $a^2 - a + 9(a^2 - a)$. (*Suggerimento: metti in evidenza* $(a^2 - a)$, *oppure svolgi semplicemente l'espressione e raccogli infine la variabile* a).

Esercizio 2. (*) Fattorizza il polinomio $4\,x^3 + 8\,x^2 + x - 3$. (*Suggerimento: cerca una radice, fai la divisione polinomiale e infine utilizza la regola della somma e del prodotto*).

Esercizio 3. (*) Fattorizza il polinomio $8\,x^3 - 14\,x^2 + 7\,x - 1$. (*Suggerimento: cerca una radice, fai la divisione polinomiale e infine utilizza la regola della somma e del prodotto*).

Esercizio 4. (*) Fattorizza il polinomio $x^3 - 13\,x^2 + 35\,x + 49$. (*Suggerimento: cerca una radice, fai la divisione polinomiale e infine utilizza la regola della somma e del prodotto*).

Esercizio 5. (*) Fattorizza il polinomio $x^3 + 2\,x^2 - x - 2$. (*Suggerimento: metti in evidenza* $x + 2$).

Esercizio 6. (*) Fattorizza il polinomio $20\,x^3 - 45\,x$. (*Suggerimento: metti in evidenza* $5\,x$).

Esercizio 7. (*) Fattorizza il polinomio $x^5 + 3\,x^4 - xy^4 - 3\,y^4$. (*Suggerimento: metti in evidenza* $x + 3$)

Esercizio 8. (*) Fattorizza il polinomio $y^3 - 5\,y^2 - 24\,y$. (*Suggerimento: metti in evidenza* y *e sfrutta la regola della somma e del prodotto*).

Esercizio 9. (*) Fattorizza il polinomio $x^2 - 6\,x + 9 - (y^2 - 2\,y + 1)$. (*Suggerimento: è una differenza di due quadrati*).

Esercizio 10. (*) Fattorizza il polinomio $\dfrac{4}{9}\,a^2 - b^2 + \dfrac{2}{3}\,a + b$. (*Suggerimento: metti in evidenza il binomio* $\left(\frac{2}{3}\,a + b\right)$).

Esercizio 11. (**) Fattorizza il polinomio $4(x-1)^2 - 4\,y(x-1) + y^2$. (*Suggerimento: ha la struttura del quadrato di un binomio*).

Esercizio 12. (**) Fattorizza il polinomio $2\,x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2 - 4\,x + 2$. (*Suggerimento: metti in evidenza* 2*, poi cerca una radice e fai la divisione polinomiale; fattorizza il quoziente cercando una radice e infine fai un'altra divisione polinomiale*).

Esercizio 13. (**) Fattorizza il polinomio $x^2 + 4\,xy - 6\,x + 4\,y^2 - 12\,y + 9$. (*Suggerimento: ci sono tre quadrati e sei termini in tutto: verifica se si tratta del quadrato di un trinomio*).

Esercizio 14. (**) Fattorizza il polinomio $(x^2 - 7\,x + 10)^2 - x^2 + 10\,x - 25$. (*Suggerimento: fattorizza i due polinomi di secondo grado e poi metti in evidenza*).

Esercizio 15. (**) Fattorizza il polinomio $x^2(x^4 - 18\,x^2 + 81) - x^6 + 729$. (*Suggerimento: c'è il quadrato di un binomio e la differenza di due cubi; metti in evidenza* $(x^2 - 9)$).

Esercizio 16. (**) Fattorizza il polinomio $x^3 - 6\,x^2y + 12\,xy^2 - 8\,y^3$. (*Suggerimento: guarda il primo e l'ultimo termine del polinomio, potrebbe trattarsi del cubo di un binomio*).

Esercizio 17. (**) Fattorizza il polinomio $x^2 - y^2 + 2\,ay - a^2$. (*Suggerimento: è una differenza di due quadrati*).

Esercizio 18. (**) Fattorizza il polinomio $(y-x)^2(3\,x+2) - 2(x-y)^3 - 2\,x^2 + 2\,y^2$. (*Suggerimento: raccogli* $(x - y)$, facendo attenzione ai segni).

Esercizio 19. (***) Fattorizza il polinomio $13\,xy - 6\,x^2 - 5\,y^2$. (*Suggerimento: si tratta di un polinomio omogeneo di secondo grado rispetto alle variabili* x, y*; possiamo cercare di fattorizzarlo quindi come prodotto di due polinomi omogenei di primo grado in* x, y.)

Esercizio 20. (***) Fattorizza il polinomio $4\,x^4 - 29\,x^2y^2 + 25\,y^4$. (*Suggerimento: aggiungi e togli* $9x^2y^2$ *e riconosci la differenza di due quadrati*).

Esercizio 21. (***) Fattorizza il polinomio $y^4 - 10\,y^2 + 24$. (*Suggerimento: cerca due radici del polinomio e poi fai la divisione polinomiale. Oppure con la sostituzione* $t = y^2$ *puoi studiare il polinomio* $t^2 - 10\,t + 24$*; ricorda che nella fattorizzazione deve comparire la variabile* y*, non la* t).

Esercizio 22. (****) Fattorizza il polinomio $36\,x^2 + 24\,xy - 48\,x + 4\,y^2 - 16\,y + 15$. (*Suggerimento: il* 15 *può essere visto come* $16 - 1$).

Soluzioni degli esercizi sulle tecniche di fattorizzazione

Per gli esercizi più facili è riportato solo il risultato. Per quelli più difficili sono stati riportati i passaggi fondamentali.

Esercizio 1. $a^2 - a + 9(a^2 - a) = (a^2 - a)(1 + 9) = 10\,a(a - 1)$.

Esercizio 2. $4\,x^3 + 8\,x^2 + x - 3 = (2\,x + 3)(2\,x - 1)(x + 1)$.

Esercizio 3. $8\,x^3 - 14\,x^2 + 7\,x - 1 = (x - 1)(2\,x - 1)(4\,x - 1)$.

Esercizio 4. $x^3 - 13\,x^2 + 35\,x + 49 = (x + 1)(x - 7)^2$.

Esercizio 5. $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1)$.

Esercizio 6. $20\,x^3 - 45\,x = 5\,x(2\,x - 3)(2\,x + 3)$.

Esercizio 7. $x^5 + 3\,x^4 - xy^4 - 3\,y^4 = (x + 3)(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$.

Esercizio 8. $y^3 - 5\,y^2 - 24\,y = y(y + 3)(y - 8)$.

Esercizio 9. $x^2 - 6\,x + 9 - (y^2 - 2\,y + 1) = (x - 3)^2 - (y - 1)^2 = (x - 4 + y)(x - 2 - y)$.

Esercizio 10. $\dfrac{4}{9}\,a^2 - b^2 + \dfrac{2}{3}\,a + b = \left(\dfrac{2}{3}\,a + b\right)\left(\dfrac{2}{3}\,a - b + 1\right)$.

Esercizio 11. $4(x - 1)^2 - 4\,y(x - 1) + y^2 = \big[2(x - 1) - y\big]^2 = (2\,x - 2 - y)^2$.

Esercizio 12. $2\,x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2 - 4\,x + 2 = 2(x^4 - 2\,x^3 + 2\,x^2 - 2\,x + 1) = 2\,(x^2 + 1)(x - 1)^2$.

Esercizio 13. $x^2 + 4\,xy - 6\,x + 4\,y^2 - 12\,y + 9 = (x + 2\,y - 3)^2$.

Esercizio 14. $(x^2 - 7\,x + 10)^2 - x^2 + 10\,x - 25 = (x - 2)^2(x - 5)^2 - (x - 5)^2 = (x - 5)^2\big[(x - 2)^2 - 1\big] =$
$= (x - 5)^2(x^2 - 4\,x + 3) = (x - 5)^2(x - 1)(x - 3)$.

Esercizio 15. $x^2(x^4 - 18\,x^2 + 81) - x^6 + 729 = x^2(x^2 - 9)^2 - \big[\,(x^2)^3 - 9^3\big] = x^2(x^2 - 9)^2 - (x^2 - 9)(x^4 + 9\,x^2 + 81) = (x^2 - 9)\big[x^2(x^2 - 9) - (x^4 + 9\,x^2 + 81)\big] = -9\,(x + 3)(x - 3)(2\,x^2 + 9)$.

Esercizio 16. $x^3 - 6\,x^2y + 12\,xy^2 - 8\,y^3 = (x - 2\,y)^3$.

Esercizio 17. $x^2 - y^2 + 2\,ay - a^2 = x^2 - (a - y)^2 = (x - a + y)(x + a - y)$.

Esercizio 18. $(y - x)^2(3\,x + 2) - 2(x - y)^3 - 2\,x^2 + 2\,y^2 = (x - y)^2(3\,x + 2) - 2(x - y)^3 - 2(x - y)(x + y) =$
$= (x - y)\big[(x - y)(3\,x + 2) - 2(x - y)^2 - 2(x + y)\big] = (x - y)(x^2 + xy - 4\,y - 2\,y^2)$.

Esercizio 19. Cerchiamo di scrivere il polinomio omogeneo $13\,xy - 6\,x^2 - 5\,y^2$ come prodotto di due binomi omogenei di primo grado in x, y; visto che 5 è primo (e può essere pertanto scritto solo come $1 \cdot 5$), il polinomio si "spezza" nel modo seguente: $13\,xy - 6\,x^2 - 5\,y^2 = (a\,x + y)(b\,x - 5\,y)$, dove a e b sono due numeri che dobbiamo determinare tenendo conto che $a \cdot b = -6$ e facendo sì che il termine misto xy abbia coefficiente uguale a 13. Facendo qualche tentativo troviamo: $13\,xy - 6\,x^2 - 5\,y^2 = (-2\,x + y)(3\,x - 5\,y)$.

Esercizio 20. Tenendo ben presente il suggerimento dato, troviamo: $4\,x^4 - 29\,x^2y^2 + 25\,y^4 =$
$= 4\,x^4 - 29\,x^2y^2 + 25\,y^4 + 9\,x^2y^2 - 9\,x^2y^2 = 4\,x^4 - 20\,x^2y^2 + 25\,y^4 - 9\,x^2y^2 = (2\,x^2 - 5\,y^2)^2 - (3\,xy)^2 =$
$= (2\,x^2 - 5\,y^2 + 3\,xy)(2\,x^2 - 5\,y^2 - 3\,xy) = (2\,x + 5\,y)(x - y)(x + y)(2\,x - 5\,y)$.

Esercizio 21. Sostituendo $t = y^2$, si ha: $y^4 - 10\,y^2 + 24 = t^2 - 10\,t + 24$; fattorizzando si trova che $t^2 - 10\,t + 24 = (t - 4)(t - 6)$. Mettendo ora y^2 al posto di t si trova $(y^2 - 4)(y^2 - 6)$; il polinomio dentro la prima parentesi può ancora essere fattorizzato, mentre l'altro è irriducibile sui razionali; in definitiva abbiamo: $y^4 - 10\,y^2 + 24 = (y - 2)(y + 2)(y^2 - 6)$.

Esercizio 22. $36\,x^2 + 24\,xy - 48\,x + 4\,y^2 - 16\,y + 15 = 36\,x^2 + 24\,xy - 48\,x + 4\,y^2 - 16\,y + 16 - 1 =$
$= (6\,x + 2\,y - 4)^2 - 1^2 = (6\,x + 2\,y - 3)(6\,x + 2\,y - 5)$.

Liceo Carducci Volterra - Classi 1A, 1B Scientifico - 9 Dicembre 2008

Esercizi di preparazione alla verifica scritta

Esercizio 1. Calcola $(3\,x+1-y^2)(3\,x+1+y^2)$. [R. $(3\,x+1)^2-\left(y^2\right)^2=9\,x^2+6\,x+1-y^4$.]

Esercizio 2. Calcola $(2\,xy^2-1)^7$ utilizzando il trinagolo di Tartaglia. Quanto vale l'espressione per $x=1$ e $y=-1$? [R. $128\,x^7y^{14}-448\,x^6\,y^{12}+672\,x^5y^{10}-560\,x^4y^8+280\,x^3y^6-84\,x^2y^4+14\,xy^2-1$.]

Esercizio 3. Calcola $(x-1)(y+2)(xy-1)+(x-2\,y)(3\,x^2+y)$. [R. $x^2y^2-2\,xy-4\,x^2y-2\,x-xy^2+y+2+3\,x^3-2\,y^2$.]

Esercizio 4. Calcola $(602)^2$ utilizzando i prodotti notevoli; (suggerimento: scrivi $602=600+2$).

Esercizio 5. Calcola $(89)^3$ utilizzando i prodotti notevoli; (suggerimento: scrivi $89=90-1$).

Esercizio 6. Calcola $59\cdot 61$ utilizzando i prodotti notevoli; (suggerimento: scrivi il prodotto come $(60-1)\cdot(60+1)$ e sfrutta la formula $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$).

Esercizio 7. Dimostra che il prodotto di un numero pari per un numero dispari è pari; (suggerimento: un numero pari si scrive come $2\cdot x$, mentre un numero dispari si scrive come $2\cdot y+1$; impostare quindi il prodotto $(2\,x)\cdot(2\,y+1)$ e concludere la dimostrazione).

Esercizio 8. Calcola il quoziente e il resto della divisione $(2\,x^3-x+1):(x-1)$. [R. $Q(x)=2\,x^2+2\,x+1$; $R(x)=2$; si verifichi in questo modo i risultati trovati: $(2\,x^2+2\,x+1)(x-1)+2=2\,x^3-x+1$]

Esercizio 9. Quali sono le possibili radici razionali del polinomio $2\,x^4-x^3+4\,x-8$? [R. $x=1;-1;2;-2;4;-4;8;-8;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}$]

Esercizio 10. Fattorizza il polinomio x^2+x-20. [R. $(x+5)(x-4)$]

Esercizio 11. Fattorizza il polinomio $x^3-7\,x^2-10\,x+16$. [R. $(x-1)(x+2)(x-8)$]

Esercizio 12. Fattorizza il polinomio $x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$. [R. $x(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$]

Esercizio 13. Fattorizza il polinomio $4\,x^2-11\,x-3$. [R. $(4\,x+1)(x-3)$ oppure $4\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-3)$]

Esercizio 14. Fattorizza il polinomio $\frac{2}{3}\,x^2+4\,x-\frac{14}{3}$. [R. $\frac{2}{3}\,(x-1)(x+7)$]

Esercizio 15. Come devo scegliere k in modo tale che il resto della divisione $(x^2-x+k):(x+2)$ sia uguale a 5 ? (suggerimento: si esegua la divisione polinomiale considerando k come parametro; si trova il risultato $k=-1$).

Esercizio 16. Si trovi la formula generale per il cubo di un trinomio; (suggerimento: $(A+B+C)^3=\left[(A+B)+C\right]^3=(A+B)^3+3(A+B)^2C+3(A+B)C^2+C^3=...=A^3+3\,A^2B+3\,A^2C+3\,AB^2+6\,ABC+3\,AC^2+B^3+3\,B^2C+3\,BC^2+C^3$; si provi la formula per $A=B=C=1$).

Esercizio 17. Scrivi un polinomio di secondo grado avente come radici $\frac{1}{3}$ e -8 (suggerimento: basta considerare il polinomio $\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+8)$ e svolgere il prodotto. Se vogliamo altri polinomi con questa proprietà, basta moltiplicare per un numero $\neq 0$ l'espressione scritta; ad esempio, possiamo moltiplcare per 4, ottenendo così: $4\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+8)$).

Esercizio 18. Scrivi un polinomio di terzo grado avente come radici 2, 5 e $-\frac{3}{2}$. [R. $(x-2)(x-5)\left(x+\frac{3}{2}\right)$. Anche qui possiamo ottenere infiniti polinomi con la stessa proprietà moltiplicando per un numero $\neq 0$; ad esempio, moltiplicando per $-\frac{3}{7}$, otteniamo il polinomio $-\frac{3}{7}(x-2)(x-5)\left(x+\frac{3}{2}\right)$]

Liceo Carducci Volterra - Classi 1A, 1B Scientifico - 15 Dicembre 2008

Esercizi di preparazione alla verifica scritta (2^a parte)

Esercizio 1. Sviluppa $(x-3\,y^2)^4$ con il triangolo di Tartaglia. [R. $x^4-12\,x^3y^2+54\,x^2y^4-108\,xy^6+81\,y^8$]

Esercizio 2. Calcola $(2\,x+y^3-5-x^2)(y^3+5-x^2+2\,x)$.
[R. $(2\,x+y^3-x^2)^2-5^2=4\,x^2+4\,xy^3-4\,x^3+y^6-2\,x^2y^3+x^4-25$]

Esercizio 3. Si calcoli $38\cdot 42$ facendo uso dei prodotti notevoli.
[R. $(40-2)\cdot(40+2)=40^2-2^2=1600-4=1596$]

Esercizio 4. Fattorizza i seguenti polinomi: x^2+x-12 ; $3\,x+2\,x^2-5$; $-x^2+10-3\,x$.
[R. $(x-3)(x+4)$; $2(x-1)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$ oppure $(x-1)(2\,x+5)$; $-(x+5)(x-2)$ oppure $(x+5)(2-x)$]

Esercizio 5. Fattorizza i seguenti polinomi: $2\,x^2+2\,x-4$; $3\,x^3+9\,x^2-12\,x-36$; $-4\,x^2-14\,x-12$.
[R. $2(x-1)(x+2)$; $3(x+3)(x-2)(x+2)$; $-4(x+2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$]

Esercizio 6. Fattorizza i seguenti polinomi: $x^2-4\,x+4$; $x^2+6\,x+9$; $4\,x^2-40\,x+100$; $9-16\,x^2$; $-x^2+2\,x-1$. *Suggerimento: guardare bene se si tratta di prodotti notevoli.* [R. $(x-2)^2$; $(x+3)^2$; $(2\,x-10)^2$ oppure $4(x-5)^2$; $(3-4\,x)(3+4\,x)$; $-(x-1)^2$]

Esercizio 7. Fattorizzare il polinomio $x^4-5\,x^3+5\,x^2+5\,x-6$. [R. $(x-3)(x+1)(x-2)(x-1)$]

Esercizio 8. Fattorizzare il polinomio $x^4+3\,x^3-9\,x^2+3\,x-10$. [R. $(x^2+1)(x-2)(x+5)$; *si osservi che il binomio (x^2+1) è irriducibile.*]

Esercizio 9. Fattorizzare i polinomi $\dfrac{3}{4}\,x^2-\dfrac{3}{8}\,x-\dfrac{3}{8}$; $-\dfrac{1}{2}\,x^3+\dfrac{1}{2}\,x^2+6\,x$; $2\,x^3-\dfrac{19}{2}\,x^2+14\,x-6$.
[R. $\dfrac{3}{4}\,(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$; $-\dfrac{1}{2}\,(x-4)(x+3)\,x$; $2\,(x-2)^2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$, in questo caso 2 è una **radice doppia** del polinomio, mentre $\frac{3}{4}$ è una **radice semplice**]

Esercizio 10. Fattorizza $x^4-4\,x^3+6\,x^2-4\,x+1$. *Suggerimento: guardare bene se si tratta di un prodotto notevole.* [R. $(x-1)^4$]

Esercizio 11. Fattorizza i polinomi $x^4+2\,x^3-3\,x^2$; $x^3-5\,x^2+13\,x-14$.
[R. $x^2(x-1)(x+3)$; $(x^2-3\,x+7)(x-2)$, *si osservi che il trinomio $x^2-3\,x+7$ è irriducibile*]

Esercizio 12. Determina k in modo tale che il polinomio $x^3-k\,x+2$ abbia come radice $x=1$. *Suggerimento: sostituire 1 al posto della x nel polinomio e imporre che il risultato sia uguale a 0.* [R. $k=3$]

Esercizio 13. Si determini il valore di k per cui la divisione polinomiale $(x^3-2\,x^2+k\,x):(x^2-1)$ ha quoziente esatto. *Suggerimento: impostare la divisione polinomiale considerando k costante.* [R. il problema non ha soluzione; si osservi che ciò è equivalente a dire che il polinomio non può avere, **contemporaneamente**, 1 e -1 come radici]

Esercizio 14. Determina un polinomio di terzo grado avente come uniche radici $x=1$ e $x=-2$ ed avente -7 come coefficiente direttivo. [R. $-7\,(x-1)^2(x+2)$ oppure $-7\,(x-1)(x+2)^2$]

Esercizio 15. Dimostra che la differenza tra due numeri quadrati perfetti consecutivi è un numero dispari. *Suggerimento: scelto x^2 il numero quadrato minore, il quadrato maggiore sarà, quindi, $(x+1)^2$.*

Esercizio 16. Dimostra che la differenza dei quadrati di due numeri dispari consecutivi è uguale al quadruplo del numero pari compreso tra i due dispari. *Suggerimento: scelto $2\,x-1$ come numero dispari minore, quello maggiore è, chiaramente, $2\,x+1$. Si osservi che il numero pari compreso tra di essi è $2\,x$ (è la media aritmetica dei due dispari considerati).*

Esercizio 17. Dimostra che la differenza tra il quadrato di un numero dispari e il quadrato del numero pari immediatamente precedente è uguale al doppio del numero pari + 1. *Suggerimento: il numero pari sia $2\,x$, quindi il numero dispari è $2\,x+1$.*

Esercizio 18. Dimostra che la differenza dei cubi di due dispari consecutivi è uguale al sestuplo del quadrato del numero pari compreso tra i due dispari + 2.

Esercizi di preparazione alla verifica scritta di gennaio

Esercizio 1. Svolgi l'espressione $(x+y)^3-(x-y)^2-(x-y)(-x+y)$. [R. $x^3+3\,x^2y+3\,xy^2+y^3$]

Esercizio 2. Svolgi l'espressione $(x-y+2)^2-3(-x-y)^2-(y-2x)(y+2x)(x+y)$. [R. $-2x^2-8xy+4x-2y^2-4y+4-xy^2-y^3+4x^3+4x^2y$]

Esercizio 3. Svolgi l'espressione $\big((x-y)^2-(x+y)^2\big)^2$. [R. $16\,x^2y^2$]

Esercizio 4. Svolgi l'espressione $\big(2\,(2\,x-y)^2-4(x+y)^2\big)^2$. [R. $16\,x^4-128\,x^3y+240\,x^2y^2+64\,xy^3+4\,y^4$]

Esercizio 5. Svolgi l'espressione $(1-x)\,\big((1-x)^3-(1-x)^2\big)$. [R. $-x+3\,x^2-3\,x^3+x^4$]

Esercizio 6. Svolgi l'espressione $2\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2-4\,(x+y)^2+8\,xy$. [R. $\frac{1}{2}-2\,x-2\,x^2-4\,y^2$]

Esercizio 7. Svolgi l'espressione $(x-2\,y+z)^2-(x+z+2\,y)^2-(x+z)^2$. [R. $-x^2-8\,xy-2\,xz-8\,yz-z^2$]

Esercizio 8. Svolgi l'espressione $(1-x)^5-2\,(1+x)^5$ facendo riferimento al triangolo di Tartaglia. Calcola il valore dell'espressione per $x=1$. [R. $-1-15\,x-10\,x^2-30\,x^3-5\,x^4-3\,x^5$; valore $=-64$]

Esercizio 9. Calcola $74\cdot 66$; $82\cdot 78$; $(705)^2$; $(29)^3$; $(43)^2-(41)^2$ utilizzando i prodotti notevoli.

Esercizio 10. Calcola $(11)^3-(10)^3$; $(5)^3+(4)^3$ utilizzando in modo opportuno i prodotti notevoli $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ (*differenza di cubi*) e $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ (*somma di cubi*).

Esercizio 11. Trova le radici del polinomio x^2+5x+6. [R. le radici sono $x_1=-2$; $x_2=-3$. Si osservi che il prodotto è uguale a 6 mentre la somma $(=-2-3=-5)$ è opposta 5. **Attenzione:** questo vale solo se il coefficiente direttivo è uguale a 1. Negli esercizi seguenti vedremo come fare negli altri casi (cioè quando il coefficiente direttivo è $\neq 1$).]

Esercizio 12. Trova le radici del polinomio $x^2-9\,x+20$. [R. le radici sono $x_1=4$ e $x_2=5$; dato che il coefficiente direttivo è uguale a 1, possiamo verificare che il prodotto è proprio 20 e la somma è proprio 9 (opposta infatti al coefficiente di x, ovvero -9)]

Esercizio 13. Trova le radici del polinomio $x^2+4\,x-21$. [R. le radici sono $x_1=3$ e $x_2=-7$; verificale con la somma e il prodotto come visto prima]

Esercizio 14. Trova le radici del polinomio $x^2+6\,x-55$. [R. le radici sono $x_1=5$ e $x_2=-11$; anche in questo caso è possibile verificarle con la somma e il prodotto perché il coefficiente direttivo è 1]

Esercizio 15. Trova le radici del polinomio $x^2-\dfrac{11}{2}\,x-\dfrac{21}{2}$. [R. le radici sono $x_1=7$ e $x_2=-\frac{3}{2}$; si faccia la verifica con la somma e il prodotto]

Esercizio 16. Trova le radici del polinomio $-8\,x-10+2\,x^2$ (suggerimento: metti in evidenza 2, ottenendo $2\cdot(x^2-4\,x-5)$ e trova le radici del polinomio tra parentesi). [R. le radici sono $x_1=-1$ e $x_2=5$; per verificarle con la somma e il prodotto dobbiamo riferirci al polinomio $x^2-4\,x-5$]

Esercizio 17. Trova le radici del polinomio $3\,x^2-\dfrac{15}{4}\,x+\dfrac{9}{8}$. [R. le radici del polinomio dato sono $x_1=\frac{1}{2}$ e $x_2=\frac{3}{4}$; per verificare queste radici possiamo osservare che, **in generale, per i polinomi di secondo grado, il prodotto delle radici è uguale al termine noto diviso per il coefficiente direttivo, mentre la somma delle radici è uguale all'opposto del coefficiente di x diviso per il coefficiente direttivo.** Si noti che questo vale anche se il coeff. direttivo è 1: in tal caso, infatti, c'è la divisione per 1]

Esercizio 18. Fattorizzare il polinomio $3\,x^2+\dfrac{21}{2}\,x-6$. [R. $3\,\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4)$]

Esercizio 19. Fattorizza il polinomio $-x^2 - x + 42$. [R. $(-1) \cdot (x-6)(x+7)$]

Esercizio 20. Fattorizza il polinomio $4\,x^2 + 18\,x + 20$. [R. $4\,\left(x+\frac{5}{2}\right)(x+2)$]

Esercizio 21. Fattorizza il polinomio $x^3 - \dfrac{11}{2}\,x^2 + 2\,x + \dfrac{5}{2}$. [R. $(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$]

Esercizio 22. Fattorizza il polinomio $-2\,x^2 - 20\,x + 2\,x^3 - 16$. [R. $2\,(x-4)(x+1)(x+2)$]

Esercizio 23. Fattorizza il polinomio $-x^2 + x^3 - 2\,x$. [R. $x(x-2)(x+1)$]

Esercizio 24. Fattorizza il polinomio $\dfrac{3}{2}\,x^3 + \dfrac{15}{2}\,x^2 - 36\,x$. [R. $\frac{3}{2}\,x(x-3)(x+8)$]

Esercizio 25. Fattorizza il polinomio $x^4 - 10\,x^2 + 9$. [R. $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$]

Esercizio 26. Fattorizza il polinomio $\dfrac{1}{3}\,x^4 + \dfrac{2}{3}\,x^3 - 3\,x^2 - \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{8}{3}$. [R. $\frac{1}{3}\,(x+1)(x-1)(x-2)(x+4)$]

Esercizio 27. Fattorizza il polinomio $\dfrac{3}{4}\,x^5 - \dfrac{51}{4}\,x^3 + 9\,x^2 + 39\,x - 36$. [R. $\frac{3}{4}\,(x+2)(x-2)(x-1)(x-3)(x+4)$]

Esercizio 28. Fattorizza il polinomio $-\dfrac{1}{2}\,x^3 - \dfrac{3}{2}\,x^2 + 2$. [R. $-\frac{1}{2}\,(x+2)^2(x-1)$]

Esercizio 29. Scrivi un polinomio di terzo grado avente come radici $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ e $x_3 = -\dfrac{1}{2}$.
[R. $(x-1)(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ oppure $73\,(x-1)(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)$; in generale $a\,(x-1)(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ purché $a \neq 0$]

Esercizio 30. Scrivi un polinomio di terzo grado avente come coefficiente direttivo $\dfrac{6}{5}$ ed avente come radici $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ e $x_3 = \dfrac{1}{2}$. [R. stavolta c'è un'unica soluzione: $\frac{6}{5}\,(x+3)(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$]

Esercizio 31. Scrivi un polinomio di quarto grado avente come uniche radici $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ e $x_3 = -\dfrac{1}{4}$.
[R. una soluzione può essere data da $(x-1)^2(x-5)\left(x+\frac{1}{4}\right)$ oppure da $(x-1)(x-5)^2\left(x+\frac{1}{4}\right)$ oppure da $(x-1)(x-5)\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$. Non ci sono vincoli sul coefficiente direttivo, per cui possiamo moltiplicare i polinomi appena scritti per un numero $a \neq 0$]

Esercizio 32. Per quale valore del parametro k il polinomio $x^3 - 2\,x^2 + kx + 2$ è divisibile per $x^2 - 1$?
[R. impostando la divisione polinomiale dobbiamo imporre che il resto della divisione sia nullo (il quoziente deve infatti essere esatto); seguendo questo procedimento si trova $k = -1$; non è la strada più veloce, però...]

Esercizio 33. Per quale valore del parametro k il polinomio $x^3 - 2\,x^2 + kx + 2$ ammette come radici $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$? Che differenza c'è con il precedente esercizio? [R. il problema è identico al precedente; infatti, se un polinomio $p(x)$ è divisibile per $x^2 - 1$, allora ha $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ come radici e viceversa]

Esercizio 34. Per quale valore di k il polinomio $x^3 - 3\,x^2 + x - k$ è divisibile per $(x+2)$? [R. Il procedimento più semplice e veloce consiste nell'osservare che il polinomio assegnato deve avere $x = -2$ come radice: è quindi sufficiente sostituire tale valore al posto della x nell'espressione del polinomio ed uguagliare a zero, ottenendo così $(-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - k = 0$, da cui $k = -22$]

Esercizio 35. Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile x tale che, diviso per $(x-4)$, dia come quoziente $(x^2 - 3\,x + 1)$ e come resto 1. [R. è sufficiente scrivere $(x-4)(x^2 - 3\,x + 1) + 1$; sviluppando si trova il polinomio $x^3 - 7\,x^2 + 13\,x - 3$]

Esercizio 36. Trovare, se esiste, un polinomio di secondo grado nella variabile x che risulti divisibile per $(x-1)$ e $(x-2)$ e tale che il resto della divisione per $(x-3)$ sia uguale a -4. [R. per prima cosa osserviamo che, dal momento che il polinomio $p(x)$ risulta divisibile per $(x-1)$ e $(x-2)$, questo polinomio ha per radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$; possiamo allora scrivere $p(x) = a\,(x-1)(x-2)$. La terza condizione può essere affrontata in due modi: o dividendo i polinomi e imponendo che il resto della divisione sia uguale a -4 oppure semplicemente sostituendo in $p(x)$ alla x il valore 3, ricavando in questo modo $a\,(3-1)(3-2) = -4$ da cui otteniamo $a = -2$. Il polinomio soluzione è, dunque: $-2(x-1)(x-2) = -2\,x^2 + 6\,x - 4$]

Esercizio 37. Scrivere un polinomio tale che, se lo dividiamo per $(x+5)$, otteniamo 7 come resto. [R. basta considerare, ad esempio, il polinomio $(x+5)(x-1) + 7$]

Esercizi sulla fattorizzazione

Esercizio 1. $(x-2)(x+3)-2\,(x-2)^3$ $\quad R.$ $(x-2)\left[x+3-2\,(x-2)^2\right]=(x-2)(-2\,x^2+9x-5)$

Esercizio 2. $(x-4)(x-3)(x^2-1)^2+(x-3)\,x^2(x+1)^2$ $\quad R.$ $(x-3)(x+1)^2(x^3-5x^2+9x-4)$

Esercizio 3. $4\,(x+2)-3\,(x+1)(-2-x)$ $\quad R.$ $(x+2)(3\,x+7)$

Esercizio 4. $(1-x)^3-2\,(x-1)^2+(x^2+1)(x-1)-(x^2-3)(1-x)^4$ $\quad R.$ $(x-1)(-x^5+3x^4-8x^2+9x-1)$

Esercizio 5. $(8x-2)(x^2-4)-(x-2)^2(x+3)^2-(3x+3)(2-x)^2$ $\quad R.$ $(x-2)(-x^3+x^2+20x+20)$

Esercizio 6. $(x^2-9)(x^2-3x+2)+2(x-3)^2(x-1)-(3x-12)(x-1)(x-3)$ $\quad R.$ $x^2(x-1)(x-3)$

Esercizio 7. $x^3+1-(2x+2)(x-2)^2+(4x-8)(-1-x)^2$ $\quad R.$ $3(x+1)(x^2+x-5)$

Esercizio 8. $x^2+6x+9-4(x^2+2x+1)$ $\quad R.$ $-(3x+5)(x-1)$

Esercizio 9. $(x^3-y^3)(x+2y)-2(x-y)^2(2x+y)+(y-x)^3$ $\quad R.$ $(x-y)(x^3-5x^2+3x^2y+4xy+3xy^2+2y^3+y^2)$

Esercizio 10. $(x+1)^2+(2x+2)(3-y)+(3-y)^2$ $\quad R.$ $(x-y+4)^2$

Esercizio 11. $x^3-6x^2+12x-8$ $\quad R.$ $(x-2)^3$

Esercizio 12. x^5+x^4-2x-2 $\quad R.$ $(x+1)(x^4-2)$

Esercizio 13. $3a(x+y)^2+3b(x+y)^2-7a(y-x)^2-7b(x-y)^2$ $\quad R.$ $-4(a+b)(x^2-5xy+y^2)$

Esercizio 14. $(1-x-2\,y)^4-9\,(x+y)^2$ $\quad R.$ $(x^2+x+1+4xy-y+4y^2)(x^2-5x+1+4xy-7y+4y^2)$

Esercizio 15. $8x^2+2xz-4xy-yz$ $\quad R.$ $(2x-y)(4x+z)$

Esercizio 16. $x^2-x^4-3\,x^3+3\,x^5$ $\quad R.$ $x^2(x-1)(3x-1)(x+1)$

Esercizio 17. $x^4-1+3(x^2+1)(x-2)$ $\quad R.$ $(x^2+1)(x^2+3x-7)$

Esercizio 18. $(-2x+4)(x+1)^3-(x+1)^2+x^2+2x+1$ $\quad R.$ $-2(x-2)(x+1)^3$

Esercizio 19. $8(x-2)^3-(y+1)^3$ $\quad R.$ $(2x-5-y)(4x^2-14x+2xy+13-2y+y^2)$

Esercizio 20. $xy^2+xy-2y^3-2y^2$ $\quad R.$ $y(y+1)(x-2y)$

Esercizio 21. $(-2x+2)(x^2-9)+3x^2-18x+27$ $\quad R.$ $-(x-3)(2x^2+x+3)$

Esercizio 22. $(x^2+x-2y)(x+y)+2x^2+2x-4y$ $\quad R.$ $(y+x+2)(x^2+x-2y)$

Esercizio 23. $(x-2)^2-(x+1)^2+(2x-1)(2x+y^2)$ $\quad R.$ $(2x-1)(2x-3+y^2)$

Esercizio 24. $x^2y^2-4xy^2+4y^2-4(x-5)-9y^2$ $\quad R.$ $(x-5)(xy^2+y^2-4)$

Esercizio 25. $x^2(a^4-b^4)+y^2(b^4-a^4)$ $\quad R.$ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(x-y)(x+y)$

Esercizio 26. $7x^3+56y^3$ $\quad R.$ $7(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

Esercizio 27. $8x^3-36x^2+54x-27$ $\quad R.$ $(2x-3)^3$

Esercizio 28. $a^2+2ab-2axy+b^2-2bxy+x^2y^2$ $\quad R.$ $(a+b-xy)^2$

Esercizio 29. $(x+1)^6-(2-x)^3$ $\quad R.$ $(x^2+3x-1)(x^4+3x^3+7x^2+3x+7)$

Esercizio 30. $x^2-(4a+5b)\,x+20ab$ $\quad R.$ $(x-5b)(x-4a)$

Esercizio 31. $(x-1)(3-2y)+4(1-x^2)(2y-3)^2-2(3-2y)^2(5-5x^2)$ $\quad R.$ $(2y-3)(x-1)(12xy-18x+12y-19)$

Esercizio 32. $3y-6-9(y^2-2y)(1+y)-4y^2-16+16y+5(4-y^2)$ $\quad R.$ $-(y-2)(9y^2+18y-1)$

Esercizio 33. $a^2-x-x^2+a-(x-a)^2$ $\quad R.$ $(1+2x)(a-x)$

Liceo “Carducci” Volterra - Classi 1A, 1B Scientifico - Francesco Daddi - 12 febbraio 2009

Esercitazione

Gli ultimi tre esercizi si riferiscono alle ultime lezioni. Gli asterischi indicano il grado di difficoltà.

Esercizio 1. (*) Svolgi la seguente espressione:

$$\left(\frac{1}{2}\,x-y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,x+y\right)^2 .$$

Esiste un procedimento veloce senza svolgere i due quadrati? Spiega.

Esercizio 2. (*) Fattorizza il polinomio $2\,x^3-12\,x^2+22\,x-12$. Quali sono le radici del polinomio?

Esercizio 3. (*) Determina k in modo tale che il polinomio $x^2-2\,x-2\,k$ abbia $x=-2$ come radice. Fattorizza infine il polinomio ottenuto utilizzando la regola della somma e del prodotto.

Esercizio 4. (*) Fattorizza il polinomio $3\,x^2+\frac{21}{4}\,x-\frac{3}{2}$.

Esercizio 5. (*) Scrivi, se possibile, un polinomio di terzo grado avente come radici $x_1=3$, $x_2=-6$ e $x_3=-\frac{2}{3}$.

Esercizio 6. (*) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado avente come uniche radici $x_1=3$ e $x_2=-4$ e avente coefficiente direttivo uguale a -7 .

Esercizio 7. (**) Verifica la seguente uguaglianza:

$$x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5) .$$

Quanti metodi conosci per risolvere questo esercizio?

Esercizio 8. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di secondo grado, con coefficiente direttivo uguale a 2, avente le due radici opposte e tale che il prodotto delle due radici sia uguale a -49.

Esercizio 9. (***) Scrivi, se possibile, un polinomio di secondo grado tale che: una radice sia $x_1=-3$; il coefficiente direttivo sia uguale a 2; se dividiamo il polinomio per $(x-1)$ il resto sia uguale a 4.

Esercizio 10. (***) Fattorizza $2\,x^3+3\,x^2+3\,x+1-3(2\,x+1)(x^2-1)$.

Esercizio 11. (***) Fattorizza $6\,a^2-ab-2\,b^2+2(2\,a+b)^2$.

Esercizio 12. (****) Dimostrare che il numero $2^{4532}-1$ non è primo.

Soluzioni esercitazione

Esercizio 1. (*) Svolgi la seguente espressione:

$$\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 .$$

Esiste un procedimento veloce senza svolgere i due quadrati? Spiega. *R.* $-2xy$. Essendo una differenza di due quadrati, non è necessario svolgere i due quadrati.

Esercizio 2. (*) Fattorizza il polinomio $2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$. Quali sono le radici del polinomio? *R.* $2(x-1)(x-2)(x-3)$. Le radici sono $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

Esercizio 3. (*) Determina k in modo tale che il polinomio $x^2 - 2x - 2k$ abbia $x = -2$ come radice. Fattorizza infine il polinomio ottenuto utilizzando la regola della somma e del prodotto. *R.* $k = 4$; $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$.

Esercizio 4. (*) Fattorizza il polinomio $3x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{3}{2}$. *R.* $3\left(x - \frac{1}{4}\right)(x+2)$.

Esercizio 5. (*) Scrivi, se possibile, un polinomio di terzo grado avente come radici $x_1 = 3$, $x_2 = -6$ e $x_3 = -\frac{2}{3}$. *R.* $(x-3)(x+6)\left(x + \frac{2}{3}\right)$.

Esercizio 6. (*) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado avente come uniche radici $x_1 = 3$ e $x_2 = -4$ e avente coefficiente direttivo uguale a -7 . *R.* $-7(x-3)^2(x+4)^2$ oppure $-7(x-3)^3(x+4)$ oppure $-7(x-3)(x+4)^3$ oppure $-7(x-3)(x+4)(x^2+6)$.

Esercizio 7. (**) Verifica la seguente uguaglianza:

$$x^6 - y^6 = (x-y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5) .$$

Quanti metodi conosci per risolvere questo esercizio? *R.* Basta svolgere il prodotto; oppure fare la divisione polinomiale $(x^6 - y^6) : (x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$ oppure la divisione polinomiale $(x^6 - y^6) : (x - y)$.

Esercizio 8. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di secondo grado, con coefficiente direttivo uguale a 2, avente le due radici opposte e tale che il prodotto delle due radici sia uguale a -49. *R.* $2(x-7)(x+7) = 2x^2 - 98$.

Esercizio 9. (***) Scrivi, se possibile, un polinomio di secondo grado tale che: una radice sia $x_1 = -3$; il coefficiente direttivo sia uguale a 2; se dividiamo il polinomio per $(x-1)$ il resto sia uguale a 4. *R.* $2x^2 + 5x - 3$.

Esercizio 10. (***) Fattorizza $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3(2x+1)(x^2-1)$. *R.* $-(2x+1)(2x^2-x-4)$.

Esercizio 11. (***) Fattorizza $6a^2 - ab - 2b^2 + 2(2a+b)^2$. *R.* $7a(2a+b)$.

Esercizio 12. (****) Dimostrare che il numero $2^{4532} - 1$ non è primo.
R. $(2^{2266})^2 - 1^2 = (2^{2266} + 1) \cdot (2^{2266} - 1)$.

Liceo "Carducci" Volterra - Classi 1A, 1B Scientifico - Francesco Daddi - 7 febbraio 2009

Scheda di autovalutazione

Questa scheda può essere di aiuto allo studente per conoscere meglio la propria preparazione. Si osservi che i "vecchi" argomenti devono far parte del bagaglio di conoscenze dello studente, il quale è pertanto invitato a ripassare tutto. Valutazione indicativa $= 1 + 0,35 \cdot$ (numero esercizi risolti correttamente). Tempo previsto: 3 ore circa.

Esercizio 1. Calcola $0,\overline{3} - 2,\overline{1} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{2} - 1} - \left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right)^{-2} - 9\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^{-1}$

Esercizio 2. Calcola $56^2 - 54^2$; 82^2 ; 201^3 ; 99^4 ; $21 \cdot 19$ utilizzando i prodotti notevoli.

Esercizio 3. Sviluppa con Tartaglia $(x - 2\,y^2 + 3\,x)^4$ e calcola il valore per $x = 1$ e $y = -2$.

Esercizio 4. Come si scrivono tutti i polinomio di terzo grado avente per radici $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = \dfrac{1}{2}$?

Esercizio 5. Determina il valore del parametro k in modo tale che il polinomio $2\,x^2 - 2\,x - 5 + k$ abbia per radice $x = -1$. Fattorizza infine il polinomio trovato utilizzando la regola della somma e del prodotto delle radici.

Esercizio 6. Scrivi un polinomio di quinto grado tale che, se lo dividiamo per $2\,x + 3$, il quoziente sia $-x^4$ e il resto sia -4. Valuta infine il polinomio per $x = -\dfrac{3}{2}$: cosa osservi? E' un caso? Spiega.

Esercizio 7. Trova le radici del polinomio $(x + 2)^3 + 3(x + 2)^2(x - 1) + 3(x + 2)(x - 1)^2 + (x - 1)^3$.

Esercizio 8. Trova, se possibile, un polinomio che divida entrambi i polinomi $(x^3 - 13x - 12)$ e $(x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 4x)$.

Esercizio 9. Trova, se possibile, un polinomio di secondo grado tale che: abbia per radice $x = 1$; se diviso per $(x - 2)$ il resto della divisione sia 7; se diviso per $(x + 1)$ il resto della divisione sia -8 .

Esercizio 10. Dimostra che la differenza delle potenze quinte di due numeri dispari che differiscono di 6 è sempre divisibile per 6.

Esercizio 11. Dimostra che qualunque numero formato da 3 cifre uguali è divisibile per 37. Dimostra che qualunque numero formato da 4 cifre uguali è divisibile per 101.

Esercizio 12. E' possibile calcolare la differenza dei quadrati di due numeri se sono noti solo la loro somma e la loro differenza?

Esercizio 13. Fattorizza il polinomio $-2\,x + 5\,x^2 - 6\,y + 15\,xy$.

Esercizio 14. Fattorizza il polinomio $(x + 1)^6 - (x - 2)^6$.

Esercizio 15. Fattorizza il polinomio $(x + 1)(3x^2 - 12) + (x - 2)^2(3x + 1) - x^2 + 4x - 4$.

Esercizio 16. Fattorizza il polinomio $x^3 + 3\,x^2 - (x + 1)^3 + 3\,x + 1$.

Esercizio 17. Fattorizza il polinomio $6\,ax^5 - 24\,a^3x^{11} - 5(2\,ax^4 + 8ax^3 + x + 4)$

Esercizio 18. Fattorizza il polinomio $\dfrac{1}{4}\,x^2 - xy^3 + 2\,x + y^6 - 4\,y^3 + 4$.

Esercizio 19. Fattorizza il polinomio $x^4 + 2\,x^3 - 2\,x - 1$.

Esercizio 20. Fattorizza il polinomio $x^2 - 5\,x - 14 - 2\,(3\,x - 1)(2\,x^2 - 15\,x + 7)$.

Esercizio 21. Fattorizza il polinomio $6\,a^2 + 11\,ab - 10\,b^2$.

Esercizio 22. Fattorizza il polinomio $\left(x^2 - 4\,y^2\right)^2 - 2ax^4 + 2ax^3 - 4ax^3y + 4ax^2y$.

Esercizio 23. Fattorizza il polinomio $18\,a^2 - 27\,ab + 4\,b^2 - (a + b)(45\,a^2 - 120\,ab + 80\,b^2)$

Esercizio 24. Fattorizza il polinomio $(x - 1)^2 + (1 - x)^2 + 2\,x - 2$.

Esercizio 25. Fattorizza il polinomio $x^3 - 4x^2 + 2x + 1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\,x^2$.

Esercizio 26. Fattorizza il polinomio $(x - 2)(x + 5)^2 + 3(-2x^2 - 2x^3 + 32x - 40) - 25 + x^2$.

Esercizio 27. Fattorizza il polinomio $(x^2 + 1)(x^2 + 4) - 2x^4 + 2$.

Esercizio 28. Fattorizza il polinomio $x^2 - \left(3\,(a + 1)^3 - 2\,a\right)\,x - 6a - 18a^3 - 18a^2 - 6a^4$.

Scheda di autovalutazione: soluzioni

Esercizio 1. $0,\overline{3}-2,\overline{1}+\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}-1}-\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\right)^{-2}-9\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{19}{9}-4-64-4=-\dfrac{664}{9}$.

Esercizio 2. $56^2-54^2=(56-54)(56+54)=220$; $82^2=(80+2)^2=6724$; $201^3=(200+1)^3=8120601$; $99^4=(100-1)^4=96059601$; $21\cdot 19=(20+1)\cdot(20-1)=20^2-1=399$.

Esercizio 3. $(x-2\,y^2+3\,x)^4=(4x-2y^2)^4=\left[2(2\,x-y^2)\right]^4=16(16x^4-32x^3y^2+24x^2y^4-8xy^6+y^8)=256x^4-512x^3y^2+384x^2y^4-128xy^6+16y^8$.

Esercizio 4. $p(x)=a(x+3)(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ con $a\neq 0$.

Esercizio 5. Con $x=-1$ si ha: $2\,(-1)^2-2\,(-1)-5+k=0$ e quindi $k=1$. Si ottiene $2\,x^2-2\,x-4=2(x+1)(x-2)$.

Esercizio 6. Basta considerare il polinomio $(2\,x+3)(-x^4)-4=-2x^5-3x^4-4$. Il polinomio, valutato per $x=-\dfrac{3}{2}$, dà -4 come risultato. Non è un caso in quanto tale valore è radice del binomio $(2\,x+3)$.

Esercizio 7. $(x+2)^3+3(x+2)^2(x-1)+3(x+2)(x-1)^2+(x-1)^3=[(x+2)+(x-1)]^3=(2\,x+1)^3$. Il polinomio ha un'unica radice: $x=-\dfrac{1}{2}$.

Esercizio 8. $x^3-13x-12=(x+3)(x-4)(x+1)$ e $x^4-2x^3-7x^2-4x=(x-4)(x+1)^2x$. Un polinomio che divide entrambi è $(x+1)$, oppure $(x-4)$, oppure $(x+1)(x-4)$ (e tutti i polinomi che si ottengono con la moltiplicazione per un numero $\neq 0$).

Esercizio 9. Il polinomio si scrive $a(x-1)(x-R)$ dove R è l'altra radice che non conosciamo. Poiché il resto della divisione per $(x-2)$ deve essere 7, abbiamo: $a(2-1)(2-R)=7 \quad\Rightarrow\quad a(2-R)=7$; poiché il resto della divisione per $(x+1)$ deve essere -8, abbiamo: $a(-1-1)(-1-R)=-8 \quad\Rightarrow\quad a(1+R)=-4$. Poiché $a=\frac{7}{2-R}=\frac{-4}{1+R}$, ricaviamo che $R=-5$ da cui $a=1$; in definitiva, il polinomio è $x^2+4\,x-5$.

Esercizio 10. $(2x+3)^5-(2x-3)^5=480x^4+2160x^2+486=6\,(80x^4+360x^2+81)$.

Esercizio 11. $100a+10a+a=111a=37\cdot(3a)$. $1000a+100a+10a+a=1111a=101\cdot(11a)$.

Esercizio 12. E' possibile, dato che $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=s\cdot d$ dove s è la somma e d è la differenza.

Esercizio 13. $-2\,x+5\,x^2-6\,y+15\,xy=(-2+5x)(x+3y)$.

Esercizio 14. $(x+1)^6-(x-2)^6=9(2x-1)(x^2-x+1)(x^2-x+7)$.

Esercizio 15. $(x+1)(3x^2-12)+(x-2)^2(3x+1)-x^2+4x-4=3(x-2)(2x^2+x+2)$.

Esercizio 16. $x^3+3\,x^2-(x+1)^3+3\,x+1=0$ (senza fare calcoli..) .

Esercizio 17. $6\,ax^5-24\,a^3x^{11}-5(2\,ax^4+8ax^3+x+4)=-(2ax^3+1)(12x^8a^2-6ax^5+5x+20)$.

Esercizio 18. $\dfrac{1}{4}\,x^2-xy^3+2\,x+y^6-4\,y^3+4=\dfrac{1}{4}\,(x-2y^3+4)^2$.

Esercizio 19. $x^4+2\,x^3-2\,x-1=(x-1)(x+1)^3$.

Esercizio 20. $x^2-5\,x-14-2\,(3\,x-1)(2\,x^2-15\,x+7)=-x(12x-11)(x-7)$.

Esercizio 21. $6\,a^2+11\,ab-10\,b^2=(2a+5b)(3a-2b)$.

Esercizio 22. $\left(x^2-4\,y^2\right)^2-2ax^4+2ax^3-4ax^3y+4ax^2y=-(x+2y)(2ax^3-x^3-2ax^2+2x^2y+4xy^2-8y^3)$.

Esercizio 23. $18\,a^2-27\,ab+4\,b^2-(a+b)(45\,a^2-120\,ab+80\,b^2)=-(3a-4b)(15a^2-6a-5ab+b-20b^2)$.

Esercizio 24. $(x-1)^2+(1-x)^2+2\,x-2=2x(x-1)$.

Esercizio 25. $x^3-4x^2+2x+1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\,x^2=\dfrac{1}{3}\,(x-1)(3x^2-7x-1)$.

Esercizio 26. $(x-2)(x+5)^2+3(-2x^2-2x^3+32x-40)-25+x^2=-(x-3)(x+5)(5x-13)$.

Esercizio 27. $(x^2+1)(x^2+4)-2x^4+2=-(x^2-6)(x^2+1)$.

Esercizio 28. $x^2-\left(3\,(a+1)^3-2\,a\right)\,x-6a-18a^3-18a^2-6a^4=(x+2a)\left[x-3(a+1)^3\right]$.

Esercizi 1 A,B Scientifico - Francesco Daddi - 17 febbraio 2009

$x^2 - y^2 + (x-y)^3$; *factor* (%);

$$x^2 - y^2 + (x-y)^3$$
$$(x-y)\left(x^2 - 2\,x\,y + x + y^2 + y\right)$$

$x^3 - y^6 + \left(2\cdot x - 2\cdot y^2\right)$; *factor* (%);

$$x^3 - y^6 + 2\,x - 2\,y^2$$
$$\left(x - y^2\right)\left(x^2 + x\,y^2 + 2 + y^4\right)$$

$(x-2)\cdot(x+y)^2 - 3\cdot(x+y)\cdot(2-y)$; *factor* (%);

$$(x-2)\,(x+y)^2 - 3\,(x+y)\,(2-y)$$
$$(x+y)\left(x\,y + y + x^2 - 2\,x - 6\right)$$

$\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)^2 - 2\cdot(x+1)^2$; *factor* (%);

$$\left(x^2-1\right)(x-1)^2 - 2\,(x+1)^2$$
$$(x-3)\,(x+1)\left(x^2+1\right)$$

$((x-2)\cdot(y+1))^2 - 2\cdot(x\cdot y + x - 2\cdot y - 2)$; *factor* (%);

$$(x-2)^2\,(y+1)^2 - 2\,x\,y - 2\,x + 4\,y + 4$$
$$(x-2)\,(y+1)\,(x\,y + x - 4 - 2\,y)$$

$x^4 - 5\cdot x^3 + 6\cdot x^2 + 4\cdot x - 8$; *factor* (%);

$$x^4 - 5\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x - 8$$
$$(x+1)\,(x-2)^3$$

$\left(x^4 + 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1\right)\cdot(x-1)^2 - 4\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$;
factor (%);

$$\left(x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 1\right)(x-1)^2 - 4\,x^2 - 4\,x - 4$$
$$(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3 - 2\,x^2 + 2\,x - 3\right)$$

$(x-2)^3 - 2\cdot(2-x)^2 + (x-4)\cdot(x-2)$; *factor* (%);

$$(x-2)^3 - 2\,(2-x)^2 + (x-4)\,(x-2)$$
$$(x-1)\,(x-2)\,(x-4)$$

$\left(x^2 - 4\cdot x + 3\right)^3\cdot\left(x^2 + 6\cdot x + 5\right)^2$; *factor* (%);

$$\left(x^2 - 4\,x + 3\right)^3\left(x^2 + 6\,x + 5\right)^2$$
$$(x-1)^3\,(x-3)^3\,(x+5)^2\,(x+1)^2$$

$x^4 + 4\cdot x^3 + 6\cdot x^2 + 4\cdot x + 1 - 9\cdot\left(x^2 - 6\cdot x + 9\right)$; *factor* (%);

$$x^4 + 4\,x^3 - 3\,x^2 + 58\,x - 80$$
$$\left(x^2 - x + 10\right)\left(x^2 + 5\,x - 8\right)$$

$\left(x^2-1\right)^9 - 8\cdot\left(1-x^2\right)^6$; *factor* (%);

$$\left(x^2-1\right)^9 - 8\left(1-x^2\right)^6$$
$$\left(x^2-3\right)\left(x^4+3\right)(x-1)^6\,(x+1)^6$$

Verifica scritta 1^a Scientifico 18/12/2008

Voto finale = somma dei punteggi parziali.

Esercizio 1. Semplifica la seguente espressione, utilizzando le proprietà delle potenze:

$$\left[-x^3y^5 - \left(-\frac{5}{4}\,xy^2\right)^2 \cdot \left(-\frac{32}{25}\,xy\right)\right]^3 \quad . \quad [\textbf{Punti} = \textbf{1/10}]$$

Esercizio 2. Svolgi la seguente espressione:

$$(3\,x^2 - y + 2 - xy - 1)(1 + 3\,x^2 - 2 - xy + y) - 2(3\,x - y)(y - 3\,x)$$

utilizzando i prodotti notevoli. [**Punti = 1/10**]
Calcola il valore dell'espressione per $x = 1$ e $y = 1$. [**Punti = 0,25/10**]

Esercizio 3. Sviluppa la potenza $(2\,x + y - 4\,x)^4$ con il triangolo di Tartaglia. [**Punti = 0,75/10**]
Calcola il valore dell'espressione per $x = 1$ e $y = 2$. [**Punti = 0,25/10**]

Esercizio 4. Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile a che, diviso per $(a^2 - 1)$, dà come quoziente $(a^2 + 1)$ e come resto -1 . [**Punti = 1/10**]

Esercizio 5. Fattorizza il polinomio $2\,x^2 + 6\,x + 4$. [**Punti = 0,75/10**]

Esercizio 6. Fattorizza il polinomio $\dfrac{3}{2}\,x^3 + \dfrac{9}{4}\,x^2 - \dfrac{3}{2}\,x$. [**Punti = 1/10**]

Esercizio 7. Determina k in modo tale che il polinomio $4\,x^4 + 12\,x^3 - 12\,x^2 - 44\,x + k$ abbia -1 come radice. [**Punti = 0,25/10**]
Fattorizza infine il polinomio ottenuto. [**Punti = 1/10**]

Esercizio 8. Determina un polinomio di quinto grado aventi come uniche radici $x = \dfrac{1}{4}$ e $x = -3$ ed avente $\dfrac{1}{2}$ come coefficiente direttivo. La soluzione è unica? Motiva la risposta. [**Punti = 1,25/10**]

Esercizio 9. Babbo Natale quest'anno ha molte renne: il loro numero è infatti uguale alla somma di 27 più il cubo di un numero intero. Vorrebbe disporre le sue renne in modo tale che formino un rettangolo le cui file sono formate da uno stesso numero (maggiore ovviamente di 1) di renne. Riuscirà a risolvere questo problema? Motiva la risposta. [**Punti = 1,5/10**]

Verifica scritta 1A Scientifico 20/01/2009

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10. Voto massimo: 10,5/10 (10 e lode)
Gli asterischi tra parentesi indicano il grado di difficoltà degli esercizi:
(*) facile ; (**) medio ; (***) impegnativo ; (****) difficile.

Esercizio 1. (*) Calcola il M.C.D. dei numeri 68 e 22 utilizzando l'algoritmo di Euclide. Come si calcola il m.c.m.?

Esercizio 2. (*) Scrivi una frazione molto "vicina" a $-\dfrac{32}{7}$.

Esercizio 3. (*) Svolgi l'espressione $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}x\right)^4$ facendo riferimento al triangolo di Tartaglia. Calcola il valore dell'espressione per $x=-1$.

Esercizio 4. (*) Svolgere l'espressione $(3-x-1)(x+2)+(x+2)^2$.

Esercizio 5. (*) Determina quoziente e resto della divisione polinomiale $[2\,(x+3)-(x+3)^2]:(x+3)$.

Esercizio 6. (*) Fattorizza il polinomio x^3-2x^2.

Esercizio 7. (*) Fattorizza il polinomio $-2\,x^2+x+1$.

Esercizio 8. (*) Fattorizza il polinomio $-\dfrac{1}{3}\,x^2-\dfrac{1}{6}\,x+\dfrac{1}{6}$.

Esercizio 9. (*) Determina le radici del polinomio $x^5+5\,x^4-36\,x^3$.

Esercizio 10. (**) Calcola quoziente e resto della divisione $(a^3+ab^4-a^2b^2+b):(a-b)$ considerando i polinomi scritti nella variabile a.

Esercizio 11. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quinto grado tale che, se lo dividiamo per (x^2-2), otteniamo $-\dfrac{3}{2}\,x+1$ come resto.

Esercizio 12. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di sesto grado in modo tale che non abbia radici e abbia termine noto nullo.

Esercizio 13. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado con termine noto uguale a $-\dfrac{5}{3}$ ed avente come uniche radici $x_1=-1$ e $x_2=4$.

Esercizio 14. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di ottavo grado in modo tale che risulti divisibile per il polinomio (x^2+x-1).

Esercizio 15. (**) Determina k in modo tale che il polinomio $x^3+k\,x^2+x+6$ abbia per radice $x=2$. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 16. (***) Scrivi, se possibile, un polinomio di secondo grado con coefficiente direttivo $\dfrac{1}{2}$, con termine noto 5 ed avente come radici $x_1=-2$ e $x_2=6$.

Esercizio 17. (***) Scrivi, se possibile, un numero intero negativo con tutte le seguenti proprietà: è un multiplo di 47; il suo valore assoluto è maggiore di 10000; può essere scritto come differenza di due quadrati non nulli.

Esercizio 18. (***) Si trovi una fattorizzazione per il polinomio $x^3+(-k-2)\,x^2+(2\,k-8)\,x+8\,k$ al variare del parametro k (*suggerimento: si trovi prima di tutto una radice del polinomio*).

Esercizio 19. (***) Dimostra che il cubo di un numero che finisce per 2 finisce per 8. Dimostra inoltre che la penultima cifra (cioè quella che viene scritta prima dell'8 finale) è sempre pari.

Esercizio 20. (****) Il numero $5^{347}+7^{234}$ è pari o dispari? Motiva adeguatamente la risposta.

Esercizio 21. (****) Dimostra che è impossibile trovare un quadrato perfetto della forma $4\,n+3$, dove n è un numero intero positivo.

Soluzioni verifica scritta 1A Scientifico 20/01/2009

Esercizio 1. $68 = 3 \cdot 22 + 2$; $22 = 2 \cdot 11 + 0$. M.C.D.(68 ; 22) = 2 (ultimo resto $\neq 0$).
m.c.m.(68 ; 22) $= \dfrac{68 \cdot 22}{M.C.D.(68;22)} = \dfrac{68 \cdot 22}{2} = 68 \cdot 11 = 68 \cdot (10+1) = 680 + 68 = 748$.

Esercizio 2. Possiamo considerare la frazione $-\dfrac{320001}{70000}$ oppure $-\dfrac{32000000}{6999999}$.

Esercizio 3. Svolgendo i calcoli si trova: $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\,x\right)^4 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{8}\,x + \dfrac{27}{32}\,x^2 + \dfrac{27}{32}\,x^3 + \dfrac{81}{256}\,x^4$. Il valore per $x = -1$ è uguale a $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} \cdot (-1)\right)^4 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{1}{256}$.

Esercizio 4. Si osservi che, per evitare di svolgere il quadrato del binomio, conviene mettere in evidenza $(x+2)$:

$$(x+2)(3 - x - 1 + x + 2) = (x+2) \cdot 4 = 4\,x + 8\ .$$

Esercizio 5. E' possibile mettere in evidenza il binomio $(x+3)$ nel polinomio dividendo:

$$2\,(x+3) - (x+3)^2 = (x+3)\big(2 - (x+3)\big) = (x+3)(-x-1)$$

abbiamo quindi che il polinomio quoziente è $(-x-1)$ e il resto è nullo.

Esercizio 6. Mettiamo in evidenza x^2:

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)\ ;$$

le radici del polinomio dato sono: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Esercizio 7. Si osserva che una radice del polinomio $-2\,x^2 + x + 1$ è $x = 1$. Visto che stiamo analizzando un polinomio di secondo grado, è possibile utilizzare la regola della somma e del prodotto delle radici; visto che il prodotto deve essere uguale a $-\dfrac{1}{2}$, e dato che una radice è $x = 1$, l'altra deve necessariamente essere $x = -\dfrac{1}{2}$. Quindi possiamo scrivere la seguente fattorizzazione del polinomio assegnato:

$$-2\,x^2 + x + 1 = -2\,(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\ .$$

Attenzione: non dimenticate il coefficiente direttivo -2.

Altro metodo: con la divisione polinomiale si trova che:

$$-2\,x^2 + x + 1 = (x-1)(-2\,x - 1)$$

e quindi, portando -2 fuori dalla seconda parentesi otteniamo:

$$-2\,x^2 + x + 1 = -2\,(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\ .$$

Esercizio 8.

$$-\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{6}\,x+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{6}\,x+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot(-2\,x^2-x+1)$$

il polinomio tra parentesi è primitivo ed ha per radici $x_1=-1$ e $x_2=\dfrac{1}{2}$, quindi ammette la seguente fattorizzazione:

$$-2\,x^2-x+1=-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ ;$$

in definitiva abbiamo:

$$-\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{6}\,x+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(-2\,(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{3}(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ .$$

Esercizio 9. Nel polinomio $x^5+5\,x^4-36\,x^3$ possiamo mettere in evidenza x^3:

$$x^5+5\,x^4-36\,x^3=x^3(x^2+5\,x-36)\ ,$$

fattorizzando il polinomio $x^2+5\,x-36$ si trova:

$$x^2+5\,x-36=(x+9)(x-4)\ ;$$

quindi il polinomio di partenza può essere così fattorizzato:

$$x^5+5\,x^4-36\,x^3=x^3(x+9)(x-4)\ .$$

Le radici del polinomio sono: $x_1=0$, $x_2=-9$ e $x_3=4$.

Esercizio 10. Svolgendo la divisione polinomiale rispetto alla lettera a si trova:

$$a^3+ab^4-a^2b^2+b=\left(a^2+a\,(b-b^2)+b^4-b^3+b^2\right)(a-b)+b^5-b^4+b^3+b\ ,$$

quindi il polinomio quoziente è $\left(a^2+a\,(b-b^2)+b^4-b^3+b^2\right)$ mentre il resto della divisione è uguale a $(b^5-b^4+b^3+b)$.

Esercizio 11. Basta considerare il polinomio

$$x^3(x^2-2)+\left(-\frac{3}{2}\,x+1\right)=x^5-2\,x^3-\frac{3}{2}\,x+1\ .$$

Esercizio 12. Un tale polinomio non può esistere perché ***ogni polinomio con termine noto nullo ha almeno una radice:*** $x=0$.

Esercizio 13. Per prima cosa scriviamo un polinomio di quarto grado avente per radici $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$:

$$(x+1)^3(x-4) \tag{1}$$

per calcolare il termine noto di questo polinomio non è necessario svolgere tutto il prodotto tra polinomi, ma è sufficiente osservare che dal cubo del primo avremo come termine noto 1, che moltiplicato per il termine noto del secondo (cioè -4), darà come risultato -4. Visto che vogliamo ottenere termine noto uguale a $-\dfrac{5}{3}$, basta moltiplicare il polinomio (1) per un numero k tale che:

$$k \cdot (-4) = -\frac{5}{3}$$

si trova $k = \dfrac{5}{12}$.

Il polinomio cercato (***attenzione: non è l'unico polinomio che risolve il problema!***) è

$$\frac{5}{12}\,(x+1)^3(x-4) = \frac{5}{12}\,x^4 - \frac{5}{12}\,x^3 - \frac{15}{4}\,x^2 - \frac{55}{12}\,x - \frac{5}{3}\;.$$

Esercizio 14. La soluzione è molto semplice: basta considerare, ad esempio, il polinomio

$$x^6(x^2+x-1) = x^8 + x^7 - x^6\;.$$

Esercizio 15. Se il polinomio $x^3 + k\,x^2 + x + 6$ ha radice $x = 2$ allora sostituendo 2 al posto della x otteniamo come risultato zero:

$$2^3 + k \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 + 4\,k + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\,k + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -4\;;$$

il polinomio risulta dunque essere:

$$x^3 - 4\,x^2 + x + 6\;.$$

Per fattorizzarlo, dividiamo il polinomio per $x-2$ (infatti $x = 2$ è radice del polinomio: l'abbiamo imposto noi) trovando

$$x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2\,x - 3)\;;$$

il polinomio quoziente (cioè quello di secondo grado) ha per radici $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$:

$$x^2 - 2\,x - 3 = (x+1)(x-3)\;;$$

in definitiva si trova la seguente fattorizzazione:

$$x^3 - 4\,x^2 + x + 6 = (x-2)(x+1)(x-3)\;.$$

Esercizio 16. Il polinomio, se esiste, deve avere la seguente forma:

$$a(x+2)(x-6)$$

con a da determinare in modo tale che siano soddisfatte le condizioni del problema. Visto che il coefficiente direttivo deve essere uguale a $\dfrac{1}{2}$, dovrà essere necessariamente $a = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\,(x+2)(x-6) = \frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x - 6$$

dato che il termine noto è uguale a -6, mentre doveva essere uguale a 5, ***il problema non ha soluzione, ovvero non esiste un polinomio con le condizioni assegnate.***

Esercizio 17. Intanto scriviamo un numero multiplo di 47 come differenza di due quadrati:

$$(50+3)\cdot(50-3) = 50^2 - 3^2$$

a questo punto possiamo moltiplicare il tutto per un quadrato perfetto molto grande, per esempio $100^2 = 10000$:

$$10000\cdot(50^2-3^2) \tag{2}$$

si osserva che il numero appena scritto è multiplo di 47 ed è maggiore di 10000 (in quanto è prodotto di 10000 per un numero maggiore di 1); dimostriamo ora che il numero (2) è differenza di due quadrati:

$$100^2\cdot(50^2-3^2) = 100^2\cdot 50^2 - 100^2\cdot 3^2 = (100\cdot 50)^2 - (100\cdot 3)^2\ .$$

Per concludere l'esercizio (vogliamo un numero negativo; per il momento ci siamo occupati del suo valore assoluto) è sufficiente cambiare di segno il numero (2):

$$-10000\cdot(50^2-3^2)\ .$$

Per la cronaca:

$$-10000\cdot(50^2-3^2) = -24910000 = 47\cdot(-530000)\ .$$

Esercizio 18. Si osserva che una radice del polinomio $[x^3+(-k-2)\,x^2+(2\,k-8)\,x+8\,k]$ è $x=k$:

$$k^3+(-k-2)\,k^2+(2\,k-8)\,k+8\,k = k^3-k^3-2\,k^2+2\,k^2-8\,k+8\,k = 0\ .$$

Dividendo il polinomio assegnato per $(x-k)$ si ha:

$$x^3+(-k-2)\,x^2+(2\,k-8)\,x+8\,k = (x-k)(x^2-2\,x-8)\ ;$$

fattorizzando il polinomio quoziente di secondo grado (ha per radici $x_1=-2$ e $x_2=4$) otteniamo:

$$x^2-2\,x-8 = (x+2)(x-4)\ ;$$

mettendo tutto assieme possiamo finalmente scrivere la fattorizzazione del polinomio di partenza:

$$x^3+(-k-2)\,x^2+(2\,k-8)\,x+8\,k = (x-k)(x+2)(x-4)\ .$$

Si osserva che il polinomio dato ha per radici $x=-2$ ***e*** $x=4$ ***indipendentemente dal valore di*** k***.***

Esercizio 19. Un numero che finisce per 2 può essere scritto nella forma $10\,x+2$, per cui abbiamo:

$$(10\,x+2)^3 = 1000\,x^3+600\,x^2+120\,x+8$$

i primi tre termini sono multipli di 10, quindi l'ultima cifra è uguale a 8.
Per quanto riguarda la penultima cifra (quella alla sinistra di 8) possiamo mettere in evidenza 10 nei primi tre termini:

$$(10\,x+2)^3 = 10\cdot\big(100\,x^3+60\,x^2+12\,x\big)+8$$

la cifra che sta alla sinistra di 8 è l'ultima cifra del numero che sta dentro la parentesi nell'ultima espressione scritta; d'altra parte il numero tra parentesi risulta essere somma di numeri pari, quindi sarà pari e, in particolare, finirà per una cifra pari.

Esercizio 20. Il numero $5^{347} + 7^{234}$ è un numero pari in quanto risulta essere somma di due numeri dispari (si ricorda che la potenza di un numero dispari è dispari).

Esercizio 21. Si osserva che i numeri della forma $4\,n+3$ sono tutti dispari in quanto sono ottenuti sommando un numero pari con 3; supponiamo che esista un numero y tale che:

$$4\,n + 3 = y^2 \tag{3}$$

anche y deve essere dispari perché il quadrato di un numero dispari è dispari (e il quadrato di un numero pari è un numero pari). Quindi y avrà la forma seguente:

$$y = 2\,k + 1$$

sostituendo nella (3) abbiamo:

$$4\,n + 3 = (2\,k + 1)^2$$

svolgendo il quadrato otteniamo:

$$4\,n + 3 = 4\,k^2 + 4\,k + 1$$

togliendo 1 ad entrambi i numeri abbiamo:

$$4\,n + 2 = 4\,k^2 + 4\,k \tag{4}$$

se dividiamo entrambi i numeri per 4 abbiamo:

$$n + \frac{1}{2} = k^2 + k$$

a sinistra abbiamo un numero che non è intero (è infatti somma di un numero intero con 1/2), mentre a destra abbiamo un numero intero. Abbiamo trovato una contraddizione perché non possiamo avere un numero che è allo stesso tempo intero e non intero: ciò significa che non possono esistere quadrati perfetti della forma $4\,n + 3$.

In realtà abbiamo dimostrato anche che i quadrati perfetti dispari sono tutti della forma $4\,n + 1$ (si ricorda che i numeri dispari si possono scrivere o nella forma $4\,n + 1$ o nella forma $4\,n + 3$ e questo per il semplice fatto che, dividendo un numero dispari per 4, otteniamo come resto 1 oppure 3).

Verifica scritta 1 B Scientifico 24/01/2009

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10.
Gli asterischi tra parentesi indicano il grado di difficoltà degli esercizi:
(*) facile ; (**) medio ; (***) impegnativo ; (****) difficile.

Esercizio 1. (*) Consideriamo il polinomio $x+3\,x^4-5\,xy^2+y$; è ordinato? E' completo? E' omogeneo?

Esercizio 2. (*) Calcola 110^3 utilizzando i prodotti notevoli.

Esercizio 3. (*) Determina quoziente e resto della divisione polinomiale $(x-x^3+1):(x^2+3)$ e verifica i risultati ottenuti.

Esercizio 4. (*) Svolgi l'espressione $(x-y)^3-(-x+2\,y-1)(x-1-2\,y)$.

Esercizio 5. (*) Svolgi $(2\,x-xy^2)^5$ facendo riferimento al triangolo di Tartaglia. Calcola il valore dell'espressione per $x=-1$ e $y=1$.

Esercizio 6. (*) Determina le radici del polinomio $-2\,x^2-16\,x-30$ utilizzando la regola del prodotto e della somma.

Esercizio 7. (*) Fattorizza il polinomio $4\,x^4-8\,x^2+4$.

Esercizio 8. (*) Fattorizza il polinomio $-\dfrac{1}{2}\,x^2-\dfrac{1}{2}\,x+\dfrac{3}{8}$.

Esercizio 9. (*) Verifica che $x_1=2$ e $x_2=-3$ sono due radici del polinomio $x^4+2\,x-4\,x^2-12+x^3$; si trovi, infine, una fattorizzazione del polinomio.

Esercizio 10. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quinto grado tale che, se lo dividiamo per il polinomio (x^4-3), il resto della divisione polinomiale è $(-2\,x^2+x)$.

Esercizio 11. (**) Determinare, se possibile, un polinomio avente entrambe le seguenti proprietà: a) è divisibile per i binomi $(x-2)$ e $(x+1)$; b) il resto della divisione per $(x+5)$ è uguale a 1.

Esercizio 12. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado avente per uniche radici $x_1=-1$ e $x_2=2$ e con il coefficiente di x^2 uguale a -10.

Esercizio 13. (**) Determina, se possibile, k in modo tale che il polinomio $x^3-x^2-2\,k\,x$ abbia come radice $x=-1$. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 14. (**) Dimostrare con l'algoritmo della divisione polinomiale la seguente formula:

$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)\ .$$

Esercizio 15. (**) Scrivi, se possibile, un polinomio di quarto grado tale che soddisfi entrambe le seguenti condizioni: a) può essere scritto come prodotto di due polinomi aventi grado maggiore o uguale di 1; b) non ha radici.

Esercizio 16. (***) Determinare, se possibile, un polinomio di secondo grado tale che abbia per radice $x=4$ e risulti divisibile per (x^2-4).

Esercizio 17. (***) Scrivi un polinomio di quinto grado avente come unica radice $x=-2$ e avente il coefficiente di x^4 uguale a 3.

Esercizio 18. (***) Qual è l'ultima cifra del prodotto $123456789\cdot 987654321$? Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 19. (***) Determina, se possibile, un valore per h e un valore per k affinché il polinomio $x^3-(h+k)\,x^2-3\,x+k+1$ abbia per radici $x_1=0$ e $x_2=3$.

Esercizio 20. (****) Consideriamo due numeri di tre cifre aventi la cifra 2 nel posto centrale e tali che l'uno si ottiene dall'altro scambiando la prima con la terza cifra. Dimostrare che, calcolando la differenza tra il quadrato del numero maggiore e il quadrato del numero minore, si ottiene un multiplo di 99.

Esercizio 21. (****) Quanti sono i quadrati perfetti che finiscono per 56 ?

Soluzioni della verifica scritta 1 B Scientifico 24/01/2009

Esercizio 1. Il polinomio $x + 3\,x^4 - 5\,xy^2 + y$ non è ordinato né rispetto a x nè rispetto a y. E' completo rispetto a y ma non rispetto a x. Non è omogeneo.

Esercizio 2. $110^3 = (11 \cdot 10)^3 = 10^3 \cdot 11^3 = 10^3 \cdot (10+1)^3 = 10^3 \cdot (10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1) = 10^3 \cdot (1331) = 1331000$.

Esercizio 3. $(x - x^3 + 1) = (x^2 + 3)(-x) + (4\,x + 1)$.
Quindi il polinomio quoziente è $Q(x) = -x$ e il polinomio resto è $R(x) = 4\,x + 1$.

Esercizio 4. $(x-y)^3 - (-x + 2\,y - 1)(x - 1 - 2\,y) = x^3 - 3\,x^2y + 3\,xy^2 - y^3 + x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 - 1$.

Esercizio 5. $\left(2\,x - xy^2\right)^5 = 32\,x^5 - 80\,x^5y^2 + 80\,x^5y^4 - 40\,x^5y^6 + 10\,x^5y^8 - x^5y^{10}$. Per calcolare il valore dell'espressione per $x = -1$ e $y = 1$ basta sostituire nell'espressione iniziale:

$$\left(2 \cdot (-1) - (-1) \cdot (1)^2\right)^5 = (-1)^5 = -1 \; .$$

Esercizio 6. Per prima cosa mettiamo -2 in evidenza:

$$-2\,x^2 - 16\,x - 30 = (-2)(x^2 + 8\,x + 15) \; ;$$

utilizzando la regola del prodotto e della somma per il polinomio tra parentesi abbiamo:

$$\text{somma} = -8 \;\; ; \;\; \text{prodotto} = 15$$

si vede facilmente che le due radici sono:

$$x_1 = -3 \;\; ; \;\; x_2 = -5 \; ;$$

il polinomio dato può essere quindi fattorizzato nel modo seguente:

$$-2\,x^2 - 16\,x - 30 = -2\,(x+3)(x+5) \; .$$

Esercizio 7. Per prima cosa mettiamo in evidenza 4:

$$4\,x^4 - 8\,x^2 + 4 = 4(x^4 - 2\,x^2 + 1) \; ;$$

è facile osservare che il polinomio $x^4 - 2\,x^2 + 1$ è il quadrato del binomio $(x^2 - 1)$:

$$x^4 - 2\,x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 \; .$$

Ora, dato che $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, abbiamo:

$$x^4 - 2\,x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 = \big((x+1)(x-1)\big)^2 = (x+1)^2(x-1)^2 \; ;$$

la fattorizzazione del polinomio assegnato è

$$4\,x^4 - 8\,x^2 + 4 = 4\,(x+1)^2(x-1)^2 \; .$$

Esercizio 8. Moltiplichiamo e dividiamo per 8:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}\cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(-4\,x^2 - 4\,x + 3\right) \ ;$$

passiamo ora alla fattorizzazione del polinomio primitivo $(-4\,x^2 - 4\,x + 3)$; si trova che ha per radici

$$x_1 = \frac{1}{2} \ ; \ \ x_2 = -\frac{3}{2}$$

quindi abbiamo:

$$-4\,x^2 - 4\,x + 3 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \ .$$

In definitiva la fattorizzazione del polinomio iniziale è:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}\cdot\left(-4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) \ ,$$

perciò risulta:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \ .$$

Esercizio 9. Possiamo risolvere l'esercizio in questo modo: dividiamo il polinomio $(x^4 + x^3 - 4\,x^2 + 2\,x - 12)$ per il polinomio $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$; si trova che la divisione è esatta ed il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 + 2$. Ciò fornisce la verifica del fatto che $x = 2$ e $x = -3$ sono due radici del polinomio assegnato. A questo punto possiamo scrivere:

$$x^4 + x^3 - 4\,x^2 + 2\,x - 12 = (x-2)(x+3)(x^2+2) \ ;$$

dato che il polinomio (x^2+2) non ha radici (è infatti somma di 2 con una quantità non negativa) abbiamo trovato la fattorizzazione del polinomio.

Esercizio 10. Basta considerare il polinomio $x(x^4 - 3) + (-2\,x^2 + x) = x^5 - 2\,x^2 - 2\,x$.

Esercizio 11. Considero i polinomi di secondo grado della forma $a(x-2)(x+1) = a(x^2 - x - 2)$; poiché il resto della divisione per $(x+5)$ deve uguale a 1, risulta:

$$a(x^2 - x - 2) = Q(x)\cdot(x+5) + 1$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente (evidentemente approssimato, dato che il resto è 1). Poiché sostituendo $x = -5$ a destra otteniamo come risultato 1, dobbiamo ottenere 1 anche sostituendo $x = -5$ a sinistra:

$$a\cdot((-5)^2 - (-5) - 2) = 1$$

e quindi:

$$a\cdot 28 = 1 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{28} \ ;$$

in definitiva il polinomio risulta essere:

$$\frac{1}{28}(x^2 - x - 2) = \frac{1}{28}x^2 - \frac{1}{28}x - \frac{1}{14} \ .$$

Esercizio 12. Consideriamo il polinomio di quarto grado seguente:

$$(x-2)(x+1)^3 \tag{1}$$

il polinomio scritto ha radici $x = 2$ e $x = -1$. Se svolgiamo il prodotto troviamo:

$$(x-2)(x+1)^3 = x^4 + x^3 - 3\,x^2 - 5\,x - 2$$

il coefficiente di x^2 è uguale a -3; poiché deve essere uguale a -10, dobbiamo moltiplicare il polinomio (1) per $\dfrac{10}{3}$. Un polinomio (ma non è l'unico) che risolve il problema è il seguente:

$$\frac{10}{3}\,(x-2)(x+1)^3 = \frac{10}{3}\,x^4 + \frac{10}{3}\,x^3 - 10\,x^2 - \frac{50}{3}\,x - \frac{20}{3}\ .$$

Esercizio 13. Visto che $x = -1$ deve essere radice del polinomio $x^3 - x^2 - 2\,k\,x$, deve risultare:

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 2\,k \cdot (-1) = 0$$

e quindi

$$2\,k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1\ ;$$

quindi il polinomio da fattorizzare è:

$$x^3 - x^2 - 2\,x\ .$$

Possiamo mettere x in evidenza:

$$x(x^2 - x - 2)$$

a questo punto, sfruttando il fatto che $x = -1$ è una radice del polinomio di secondo grado nella parentesi, possiamo sfruttare la formula per il prodotto delle radici, ricavando l'altra radice: $x = 2$. In definitiva abbiamo:

$$x^3 - x^2 - 2\,x = x(x-2)(x+1)\ .$$

Esercizio 14. Basta eseguire la divisione polinomiale

$$(x^5 - y^5) : (x - y)$$

rispetto a x o rispetto a y. Si trova che la divisione è esatta ed il polinomio quoziente è proprio $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$.

Esercizio 15. Basta considerare il polinomio seguente:

$$(x^2+1)(x^2+2)\ ;$$

i due polinomi nelle parentesi non hanno radici.

Esercizio 16. Un tale polinomio di secondo grado non esiste. Risultando infatti divisibile per (x^2-4), ammetterebbe per radici $x = 2$ e $x = -2$; dovendo inoltre avere per radice $x = 4$, avrebbe tre radici; ma ***un polinomio di secondo grado può avere al massimo due radici.***

Esercizio 17. Scriviamo intanto il polinomio

$$(x^4+1)(x+2)\ ; \tag{2}$$

esso è di quinto grado ed ha come unica radice $x=-2$; svolgendo il prodotto si trova:

$$x^5+2\,x^4+x+2$$

il coefficiente di x^4 è uguale a 2; poiché il testo dell'esercizio richiede che il coefficiente di x^4 risulti uguale a 3, dobbiamo moltiplicare per $\dfrac{3}{2}$ il polinomio (2), ottenendo così:

$$\frac{3}{2}\,(x^4+1)(x+2)=\frac{3}{2}\,x^5+3\,x^4+\frac{3}{2}\,x+3\ .$$

Altra soluzione: consideriamo il polinomio

$$(x+2)^5 \tag{3}$$

osserviamo che ha per unica radice $x=-2$; sviluppando con Tartaglia abbiamo:

$$(x+2)^5=x^5+10\,x^4+40\,x^3+80\,x^2+80\,x+32$$

per la stessa ragione esposta in precedenza per il primo metodo, dobbiamo moltiplicare il polinomio (3) per $\dfrac{3}{10}$:

$$\frac{3}{10}\,(x+2)^5=\frac{3}{10}\,x^5+3\,x^4+12\,x^3+24\,x^2+24\,x+\frac{48}{5}\ .$$

Esercizio 18. Dobbiamo calcolare l'ultima cifra del prodotto seguente: $123456789\cdot 987654321$. Ragioniamo così:

$$123456789=10\,x+9\ \ ;\ \ 987654321=10\,y+1$$

moltiplicando i due binomi al posto dei due numeri troviamo:

$$(10\,x+9)(10\,y+1)=100\,xy+10\,x+90\,y+9$$

i primi tre termini sono multipli di 10, quindi l'ultima cifra della moltiplicazione è 9.

Esercizio 19. Dato che il polinomio $x^3-(h+k)\,x^2-3\,x+k+1$ deve avere per radice $x=0$ deve risultare necessariamente $k+1=0$ e quindi $k=-1$. Ora imponiamo che il polinomio abbia per radice $x=3$:

$$3^3-(h-1)\,(3)^2-3\cdot 3=0\ \ \Rightarrow\ \ 27-9\,h=0$$

da cui si ricava facilmente il valore $h=3$. Il polinomio, quindi, è il seguente:

$$x^3-2\,x^2-3\,x\ ;$$

per la cronaca, il polinomio si fattorizza nel modo seguente:

$$x^3-2\,x^2-3\,x=x(x+1)(x-3)\ .$$

Esercizio 20. I due numeri N_1, N_2 si possono scrivere così:

$$N_1 = 100\,a + 20 + b \;\; ; \;\; N_2 = 100\,b + 20 + a$$

con a e b interi compresi tra 1 e 9 (compresi). Supponiamo che $N_1 > N_2$ (e quindi $a > b$); scrivendo la differenza dei due quadrati abbiamo:

$$N_1^2 - N_2^2 = (100\,a + 20 + b)^2 - (100\,b + 20 + a)^2 = 9999\,a^2 + 3960\,a - 3960\,b - 9999\,b^2$$

osservando che $9999 = 99 \cdot 101$ e $3960 = 99 \cdot 40$, abbiamo:

$$(100\,a + 20 + b)^2 - (100\,b + 20 + a)^2 = 99 \cdot 101\left(a^2 - b^2\right) + 99 \cdot 40(a - b) =$$

$$= 99 \cdot \left[101\left(a^2 - b^2\right) + 40(a - b)\right]$$

e quindi abbiamo concluso la dimostrazione.
Si osservi che è possibile fattorizzare l'ultima espressione anche nel modo seguente:

$$99(a - b)(101\,a + 40 + 101\,b)\ .$$

Esercizio 21. Notiamo subito che

$$(16)^2 = 256\ ;$$

ora, se consideriamo il quadrato dei numeri della forma

$$100\,x + 16$$

abbiamo:

$$(100\,x + 16)^2 = 10000\,x^2 + 3200\,x + 256$$

indipendentemente da x, i primi due addendi sono multipli di 100, quindi le ultime due cifre sono necessariamente 56. Poiché x può essere qualsiasi numero naturale, abbiamo infiniti quadrati perfetti con la proprietà desiderata.

Verifica scritta 1 B Scientifico 28/02/2009

Prof. Francesco Daddi

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10. Punteggio di partenza = 1/10.

Esercizio 1. Fattorizza il seguente polinomio: $(x-2)^2 - 2\,(x+1)(x-2)$

Esercizio 2. Fattorizza il seguente polinomio: $(1-x)(x+2) - 4\,x(x-1)^2$

Esercizio 3. Fattorizza il seguente polinomio: $x^2 + 4\,x + 4 + 9\,(-4\,x^2 + 12\,x - 9)$

Esercizio 4. Fattorizza il seguente polinomio: $x^6 - 8$

Esercizio 5. Fattorizza il seguente polinomio: $x^4 - 16\,y^4 - (x-2\,y)(x+2\,y)^2$

Esercizio 6. Fattorizza il seguente polinomio: $(y-3\,x)^2 + 2\,(x+1)(3\,x-y) + x^2 + 1 + 2\,x$

Esercizio 7. Fattorizza il seguente polinomio: $x^2 a\,y^2 + 2\,x\,a\,y^2 + a\,y^2$

Esercizio 8. Fattorizza il seguente polinomio: $x^7 - 4\,x^5 + x^3 - 4\,x$

Esercizio 9. Fattorizza il seguente polinomio: $8\,(x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1) - 27$

Esercizio 10. Fattorizza il seguente polinomio: $x^2y + xy + a^3x^2 + a^3x$

Esercizio 11. Fattorizza il seguente polinomio: $4\,(4\,x - x^2 - 3) - (x-1)^2(2\,x^2 + 4\,x - 6)$

Esercizio 12. Fattorizza il seguente polinomio: $x^3(x-1)^2 - 3\,x^2(x-1)^2 + (x-1)x^3 - 3\,(x-1)x^2$

Esercizio 13. Fattorizza il seguente polinomio: $x^2 - 4\,xy + 6\,xz + 4\,y^2 - 12\,yz + 9\,z^2$

Esercizio 14. Fattorizza il seguente polinomio: $2\,x^3 - 9\,x^2 + 7\,x + 6$

Esercizio 15. Fattorizza il seguente polinomio: $a^4 - 1 + a^4 + a^3$

Esercizio 16. Fattorizza il seguente polinomio: $x^2 - 2\,xy + 10\,x + y^2 - 10\,y + 21$

Esercizio 17. Fattorizza il seguente polinomio: $8\,x^2 - 8\,xy - 6\,y^2$

Esercizio 18. Scrivi un polinomio di quarto grado avente come uniche radici $x = 1$, $x = 2$ e $x = -3$ e con coefficiente direttivo uguale a $-\dfrac{7}{3}$.

Esercizio 19. Determina k in modo tale che il polinomio $x^3 - k\,x^2 - x + k$ abbia $x = 2$ come radice. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 20. Dire se il numero $729^{13} + 64$ è primo. Motiva la risposta.

Esercizio 21. Dimostra che i numeri della forma $x^8 + 4$ (dove x è un numero intero > 1) non sono primi.

Soluzioni verifica 1 B Scientifico 28 febbraio 2009 fila 1

```
> (x - 2)^2 - 2*(x + 1)* (x - 2);factor(%);
```

$$(x-2)^2 - 2\,(x+1)\,(x-2)$$

$$-(x+4)\,(x-2)$$

```
> (1 - x)* (x + 2) - 4* x *(x - 1)^2 ;factor(%);
```

$$(1-x)\,(x+2) - 4\,x\,(x-1)^2$$

$$-(x-1)\,(4\,x^2 - 3\,x + 2)$$

```
> x^2 + 4*x + 4 + 9*(-4*x^2 + 12* x - 9);factor(%);
```

$$-35\,x^2 + 112\,x - 77$$

$$-7\,(x-1)\,(5\,x-11)$$

```
> x^6-8;factor(%);
```

$$x^6 - 8$$

$$(x^2-2)\,(x^4 + 2\,x^2 + 4)$$

```
> x^4 - 16* y^4 - (x - 2* y) *(x + 2* y)^2;factor(%);
```

$$x^4 - 16\,y^4 - (x-2\,y)\,(x+2\,y)^2$$

$$(x-2\,y)\,(x+2\,y)\,(x^2 - x - 2\,y + 4\,y^2)$$

```
> (y - 3* x)^2 + 2* (x + 1)* (3* x - y) + x^2 + 1 + 2* x;factor(%);
```

$$(y-3\,x)^2 + 2\,(x+1)\,(3\,x-y) + x^2 + 1 + 2\,x$$

$$(4\,x - y + 1)^2$$

```
> x^2 *a * y^2 + 2* x * a * y^2 + a * y^2;factor(%);
```

$$x^2\,a\,y^2 + 2\,x\,a\,y^2 + a\,y^2$$

$$a\,y^2\,(x+1)^2$$

```
> x^7 - 4* x^5 + x^3 - 4* x;factor(%);
```

$$x^7 - 4\,x^5 + x^3 - 4\,x$$

$$x\,(x-2)\,(x+2)\,(x^4+1)$$

```
> 8* (x^3 - 3* x^2 + 3* x - 1) - 27;factor(%);
```

$$8\,x^3 - 24\,x^2 + 24\,x - 35$$

$$(2\,x-5)\,(4\,x^2 - 2\,x + 7)$$

```
> x^2 *y + x *y + a^3 *x^2 + a^3 *x;factor(%);
```

$$x^2\,y + x\,y + a^3\,x^2 + a^3\,x$$

$$x\,(y + a^3)\,(x+1)$$

```
> 4* (4* x - x^2 - 3) - (x - 1)^2 *(2* x^2 + 4* x - 6);factor(%);
```

$$16\,x - 4\,x^2 - 12 - (x-1)^2\,(2\,x^2 + 4\,x - 6)$$

$$-2\,(x-1)\,(x+1)\,(x^2-3)$$

```
> x^3* (x - 1)^2 - 3* x^2 *(x - 1)^2 + (x - 1)* x^3 - 3* (x - 1)
*x^2;factor(%);
```

$$x^3 (x-1)^2 - 3 x^2 (x-1)^2 + (x-1) x^3 - 3 (x-1) x^2$$

$$x^3 (x-1)(x-3)$$

```
> x^2 - 4* x *y + 6* x *z + 4* y^2 - 12* y *z + 9* z^2;factor(%);
```

$$x^2 - 4 x y + 6 x z + 4 y^2 - 12 y z + 9 z^2$$

$$(x - 2 y + 3 z)^2$$

```
> 2* x^3 - 9* x^2 + 7* x + 6;factor(%);
```

$$2 x^3 - 9 x^2 + 7 x + 6$$

$$(x-2)(x-3)(2 x+1)$$

```
> a^4 - 1 + a^4 + a^3;factor(%);
```

$$2 a^4 - 1 + a^3$$

$$(a+1)(2 a^3 - a^2 + a - 1)$$

```
> x^2 - 2* x *y + 10* x + y^2 - 10* y + 21;factor(%);
```

$$x^2 - 2 x y + 10 x + y^2 - 10 y + 21$$

$$(x - y + 7)(x - y + 3)$$

```
> 8* x^2 - 8* x *y - 6* y^2;factor(%);
```

$$8 x^2 - 8 x y - 6 y^2$$

$$2 (2 x + y)(2 x - 3 y)$$

```
>> -7/3*(x-1)^2*(x-2)*(x+3);expand(%);
```

$$-\frac{7 (x-1)^2 (x-2)(x+3)}{3}$$

$$-\frac{7}{3} x^4 + \frac{7}{3} x^3 + \frac{49}{3} x^2 - \frac{91}{3} x + 14$$

```
> x^3-2*x^2-x+2;factor(%);
```

$$x^3 - 2 x^2 - x + 2$$

$$(x-1)(x-2)(x+1)$$

```
>> 729^13 + 64;ifactor(%);x^39+64;factor(%);
```

$$16423203268260658146231467800709255353$$

$$(13)\ (1381)\ (141584461)\ (2548848971821)\ (10387537)\ (244033)$$

$$x^{39} + 64$$

$$(x^{13} + 4)(x^{26} - 4 x^{13} + 16)$$

```
> x^8+4;factor(%);
```

$$x^8 + 4$$

$$(x^4 - 2 x^2 + 2)(x^4 + 2 x^2 + 2)$$

Verifica scritta 1A Scientifico 03/03/2009

Prof. Francesco Daddi

Gli esercizi hanno tutti lo stesso punteggio = 0,5/10. Punteggio di partenza = 1/10.

Esercizio 1. Fattorizza il seguente polinomio: $(x+1)^2 + 2\,(x+1)^3(x+2)$

Esercizio 2. Fattorizza il seguente polinomio: $x^8 - 1$

Esercizio 3. Fattorizza il seguente polinomio: $x^2 - 4\,y^2 + 2(x+2\,y)(x-1)$

Esercizio 4. Fattorizza il seguente polinomio: $x^3 - y^3 - (y-x)^2(y+x)$

Esercizio 5. Fattorizza il seguente polinomio: $ab + b^2 - (a+b)^2 - 3(a+b)^3$

Esercizio 6. Fattorizza il seguente polinomio: $10\,x^2y - 25\,xy^2 - x^3 - 2\,(5\,y-x)^3$

Esercizio 7. Fattorizza il seguente polinomio: $a^4b - 2\,a^2b - c^2(a^2-2)^2$

Esercizio 8. Fattorizza il seguente polinomio: $4\,a^4 - 28\,a^3b + 12\,a^2b^2 - 42\,ab^3 + 9\,b^4$

Esercizio 9. Fattorizza il seguente polinomio: $(x-2\,y)^2 - (x+1)^4$

Esercizio 10. Fattorizza il seguente polinomio: $(x+4)^2 + x^3 - x^2 - 20\,x$

Esercizio 11. Fattorizza il seguente polinomio: $(a-2\,b)^2 - 2(a+b)(a-2\,b) + a^2 - 4\,b^2$

Esercizio 12. Fattorizza il seguente polinomio: $-8\,x^3 - 12\,yx^2 - 6\,y^2x - y^3$

Esercizio 13. Fattorizza il seguente polinomio: $a^2\,x(y+2) - a^2x + 4(y^2+4\,y+3)$

Esercizio 14. Fattorizza il seguente polinomio: $x^4 - 5\,x^3 + x - 5$

Esercizio 15. Fattorizza il seguente polinomio: $6\,x^2 - 22\,yx + 20\,y^2$

Esercizio 16. Fattorizza il seguente polinomio: $9\,x^6 + 30\,x^3 + 25 - y^4 - 2\,x^2y^2 - x^4$

Esercizio 17. Fattorizza il seguente polinomio: $25\,x^2 - 10\,x + 5\,ax + 1 - a$

Esercizio 18. In che modo possono essere scritti tutti i polinomi di terzo grado aventi come radici $x=-3$, $x=5$ e $x=-6$?

Esercizio 19. Determina un polinomio di secondo grado con le seguenti proprietà: ha per radice $x=2$, se diviso per $(x-1)$ il resto della divisione è uguale a 1, mentre se viene diviso per x il resto è uguale a -1.

Esercizio 20. Dire se il numero $81^{10} - 77^{10}$ è primo. Motiva la risposta.

Esercizio 21. Dimostra che, se a non è divisibile né per 2 né per 3, allora il numero (a^2-1) è divisibile per 24.

Soluzioni verifica 1A Scientifico 3 marzo 2009 (fila 1)

```
> (x+1)^2+2*(x+1)^3*(x+2);factor(%);
```

$$(x+1)^2+2\,(x+1)^3\,(x+2)$$

$$(2\,x^2+6\,x+5)\,(x+1)^2$$

```
> x^8-1;factor(%);
```

$$x^8-1$$

$$(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)\,(x^4+1)$$

```
> x^2-4*y^2+2*(x+2*y)*(x-1);factor(%);
```

$$x^2-4\,y^2+2\,(x+2\,y)\,(x-1)$$

$$(x+2\,y)\,(3\,x-2-2\,y)$$

```
> x^3-y^3-(y-x)^2*(y+x);factor(%);
```

$$x^3-y^3-(y-x)^2\,(y+x)$$

$$y\,(x+2\,y)\,(x-y)$$

```
> a*b+b^2-(a+b)^2-3*(a+b)^3;factor(%);
```

$$a\,b+b^2-(a+b)^2-3\,(a+b)^3$$

$$-(a+b)\,(3\,b^2+6\,a\,b+a+3\,a^2)$$

```
> 10*x^2*y-25*x*y^2-x^3-2*(5*y-x)^3;factor(%);
```

$$10\,y\,x^2-25\,y^2\,x-x^3-2\,(5\,y-x)^3$$

$$(x-10\,y)\,(x-5\,y)^2$$

```
> a^4*b-2*a^2*b-c^2*(a^2-2)^2;factor(%);
```

$$a^4\,b-2\,a^2\,b-c^2\,(a^2-2)^2$$

$$-(a^2-2)\,(c^2\,a^2-a^2\,b-2\,c^2)$$

```
> 4*a^4-28*a^3*b+12*a^2*b^2-42*a*b^3+9*b^4;factor(%);
```

$$4\,a^4-28\,a^3\,b+12\,a^2\,b^2-42\,a\,b^3+9\,b^4$$

$$(2\,a^2+3\,b^2)\,(2\,a^2-14\,a\,b+3\,b^2)$$

```
> (x-2*y)^2-(x+1)^4;factor(%);
```

$$(x-2\,y)^2-(x+1)^4$$

$$-(2\,y+x+x^2+1)\,(-2\,y+3\,x+x^2+1)$$

```
> (x+4)^2+x^3-x^2-20*x;factor(%);
```

$$(x+4)^2+x^3-x^2-20\,x$$

$$(x+4)\,(x-2)^2$$

```
> (a-2*b)^2-2*(a+b)*(a-2*b)+a^2-4*b^2;factor(%);
```

$$(a-2\,b)^2-2\,(a+b)\,(a-2\,b)+a^2-4\,b^2$$

$$2\,b\,(-a+2\,b)$$

```
> -8*x^3-12*y*x^2-6*y^2*x-y^3;factor(%);
```

$$-8x^3 - 12yx^2 - 6y^2x - y^3$$

$$-(2x+y)^3$$

```
> a^2*x*(y+2)-a^2*x+4*(y^2+4*y+3);factor(%);
```

$$a^2x(y+2) - a^2x + 4y^2 + 16y + 12$$

$$(y+1)(4y+12+a^2x)$$

```
> x^4-5*x^3+x-5;factor(%);
```

$$x^4 - 5x^3 + x - 5$$

$$(x-5)(x+1)(x^2-x+1)$$

```
> 6*x^2-22*y*x+20*y^2;factor(%);
```

$$6x^2 - 22yx + 20y^2$$

$$2(3x-5y)(x-2y)$$

```
> 9*x^6+30*x^3+25-y^4-2*x^2*y^2-x^4;factor(%);
```

$$9x^6 + 30x^3 + 25 - y^4 - 2x^2y^2 - x^4$$

$$(y^2+5+x^2+3x^3)(-y^2+5-x^2+3x^3)$$

```
> 25*x^2-10*x+5*a*x+1-a;factor(%);
```

$$25x^2 - 10x + 1 + 5ax - a$$

$$(5x-1)(5x-1+a)$$

```
> a*(x+3)*(x-5)*(x+6);
```

$$a(x+3)(x-5)(x+6)$$

```
> expand(-3/2*(x-2)*(x-1/3));
```

$$-\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1$$

```
> 81^(10)-77^(10);ifactor(%);
```

$$4830984986470728152$$

$$(2)^3\ (79)\ (991)\ (196771)\ (39199801)$$

```
> x^10-y^10;factor(%);
```

$$x^{10} - y^{10}$$

$$(x-y)(y+x)(x^4+yx^3+x^2y^2+y^3x+y^4)(x^4-yx^3+x^2y^2-y^3x+y^4)$$

Il numero a è dispari, quindi (a+1) e (a-1) sono pari; inoltre uno dei due tra (a+1) e (a-1) è multiplo di 4. Quindi (a+1)(a-1) è multiplo di 4 x 2 = 8.
Il numero a non è multiplo di 3, quindi uno dei due tra (a+1) e (a-1) è multiplo di 3.
In definitiva abbiamo che (a+1)(a-1) è multiplo di 8 x 3 = 24.

Verifica scritta 1B Scientifico 28/03/2009

Prof. Francesco Daddi

Punteggio di partenza = 2/10.

Gli esercizi 1 - 14 hanno punteggio = 0,45/10. Gli esercizi 15 - 18 hanno punteggio = 0,7/10.

Esercizio 1. Svolgi $(x-y)^2+2(x^2+y)^2$.

Esercizio 2. Svolgi $(y^2-2\,x^3)^5$.

Esercizio 3. Fattorizza $x^2+4\,x-5$; sfrutta il risultato ottenuto per fattorizzare il polinomio $x^4+4\,x^2-5$.

Esercizio 4. Fattorizza $x^3-x^2-4\,x+4$.

Esercizio 5. Fattorizza $4\,x^2+12\,xy+8\,y^2$.

Esercizio 6. Determina per quali valori di k il polinomio $x^3+2\,x^2+k\,x-k$ ha per radice $x=-1$. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 7. Sapendo che $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{2}{3}$ e $x_3=\dfrac{6}{7}$ sono radici del polinomio $-\dfrac{37}{4}\,x^3+\dfrac{925}{84}\,x^2+\dfrac{74}{21}\,x-\dfrac{37}{7}$, si trovi una fattorizzazione del polinomio.

Esercizio 8. Sapendo che $x_1=2$ e $x_2=-3$ sono radici del polinomio $2\,x^3-6\,x^2-20\,x+48$, si trovi una fattorizzazione del polinomio. Scrivi tutte le radici del polinomio.

Esercizio 9. Fattorizza $x^2-(2\,a+5\,a^2)x+10\,a^3$.

Esercizio 10. Svolgi $\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{4\,x+4}{x+1}$.

Esercizio 11. Svolgi $\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}$.

Esercizio 12. Svolgi $\dfrac{1-b}{b^2-25}+\dfrac{2}{b+5}-4$.

Esercizio 13. Svolgi $x+1+\dfrac{5}{x^3+x^2-3\,x-3}+\dfrac{1}{(x^2-3)^2}$.

Esercizio 14. Svolgi $\dfrac{x}{y+3}-\dfrac{y}{2\,xy+6\,x-y-3}+\dfrac{2-2\,y}{-4\,xy+4\,x+2\,y-2}$.

Esercizio 15. Uno studente oggi festeggia il suo sedicesimo compleanno; tra 9 anni avrà 25 anni, dopo altri 11 anni avrà 36 anni, dopo altri 13 ne avrà 49, e così via. E' un caso oppure c'è una spiegazione matematica per questo fatto?

Esercizio 16. Consideriamo un numero di tre cifre e il numero che si ottiene dal precedente scambiando le prime due cifre. Dimostra che la differenza dei loro quadrati è un multiplo di 180.

Esercizio 17. Dimostra che la differenza delle seste potenze di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 8. Dimostra inoltre che, considerando la somma al posto della differenza, otteniamo un numero pari ma non multiplo di 4.

Esercizio 18. Consideriamo il prodotto di cinque numeri interi consecutivi; dimostra che, sommando al numero ottenuto la quinta potenza del numero centrale, ricaviamo un numero dispari solo nel caso in cui il numero centrale è dispari.

Soluzioni verifica scritta 1B Scient. 28/03/2009 (fila 1)

Prof. Francesco Daddi

Esercizio 1. $(x-y)^2+2(x^2+y)^2 = x^2-2\,xy+3\,y^2+2\,x^4+4\,x^2y$.

Esercizio 2. $\left(y^2-2\,x^3\right)^5 = y^{10}-10\,y^8x^3+40\,y^6x^6-80\,y^4x^9+80\,y^2x^{12}-32\,x^{15}$.

Esercizio 3. $x^2+4\,x-5=(x+5)(x-1)$; $x^4+4\,x^2-5=(x^2+5)(x^2-1)=(x^2+5)(x+1)(x-1)$.

Esercizio 4. $x^3-x^2-4\,x+4=(x-1)(x-2)(x+2)$.

Esercizio 5. $4\,x^2+12\,xy+8\,y^2=4(x+2\,y)(x+y)$.

Esercizio 6. Sostituendo il valore $x=-1$ nel polinomio $x^3+2\,x^2+k\,x-k$ si trova $k=\dfrac{1}{2}$. Con la divisione polinomiale troviamo la fattorizzazione del polinomio:

$$x^3+2\,x^2+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}=(x+1)\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 7. Visto che il polinomio è di terzo grado, possiamo scrivere semplicemente:

$$-\frac{37}{4}\,x^3+\frac{925}{84}\,x^2+\frac{74}{21}\,x-\frac{37}{7}=-\frac{37}{4}(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{6}{7}\right).$$

Esercizio 8. Poiché sappiamo che $x_1=2$ e $x_2=-3$ sono due radici del polinomio, possiamo dividere il polinomio per $(x-2)(x+3)$: la divisione è esatta e il quoziente di fornisce la terza radice. In definitiva si ottiene la seguente fattorizzazione: $2\,x^3-6\,x^2-20\,x+48=2(x-2)(x+3)(x-4)$. Le radici del polinomio, pertanto, sono: $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=4$.

Esercizio 9. Basta fare riferimento alla somma e al prodotto delle radici. Troviamo:

$$x^2-(2\,a+5\,a^2)x+10\,a^3=(x-2\,a)(x-5\,a^2).$$

Esercizio 10. $\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{4\,x+4}{x+1}=\dfrac{4\,x+5}{x+1}$.

Esercizio 11. $\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{(x^3-2\,x^2+3\,x-2)x}{x^2-x+1}$.

Esercizio 12. $\dfrac{1-b}{b^2-25}+\dfrac{2}{b+5}-4=\dfrac{-4\,b^2+b+91}{b^2-25}$.

Esercizio 13. $x+1+\dfrac{5}{x^3+x^2-3\,x-3}+\dfrac{1}{(x^2-3)^2}=\dfrac{x^6+2\,x^5-5\,x^4-12\,x^3+8\,x^2+19\,x-5}{(x^2-3)^2(x+1)}$.

Esercizio 14. $\dfrac{x}{y+3}-\dfrac{y}{2\,xy+6\,x-y-3}+\dfrac{2-2\,y}{-4\,xy+4\,x+2\,y-2}=\dfrac{2\,x^2-x+3}{(2\,x-1)(y+3)}$.

Esercizio 15. Basta analizzare la differenza tra due quadrati perfetti consecutivi: $(x+1)^2-x^2=2\,x+1$; si ottengono in questo modo tutti i numeri dispari.

Esercizio 16. I due numeri possono essere scritti nella seguente forma: $(100\,x+10\,y+z)$ e $(100\,y+10\,x+z)$; la differenza dei loro quadrati è $(100\,x+10\,y+z)^2-(100\,y+10\,x+z)^2=9900\,x^2+180\,xz-9900\,y^2-180\,yz=180\,(x-y)(55\,x+55\,y+z)$; abbiamo ottenuto un multiplo di 180.

Esercizio 17. I due numeri dispari consecutivi possono essere scritti come $2\,x+1$ e $2\,x-1$; studiamo la differenza delle loro seste potenze: $(2\,x+1)^6-(2\,x-1)^6=8\,x(12\,x^2+1)(4\,x^2+3)$: si tratta di un multiplo di 8. Analizziamo ora la somma delle loro seste potenze: $(2\,x+1)^6+(2\,x-1)^6=2(4\,x^2+1)(16\,x^4+56\,x^2+1)$: si tratta di un prodotto in cui un fattore è 2 e gli altri sono dispari, quindi il numero ottenuto è pari ma non multiplo di 4.

Esercizio 18. Primo metodo: indicato con x il numero centrale, consideriamo l'espressione

$$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+x^5=2\,x^5-5\,x^3+4\,x=x(2\,x^4-5\,x^2+4)\ ;$$

nel caso in cui il numero centrale x è pari il numero ottenuto è ovviamente pari. Vediamo cosa succede nel caso in cui x è dispari: la parentesi $(2\,x^4-5\,x^2+4)$ è dispari (i termini $2\,x^4$ e 4 sono pari, mentre $-5\,x^2$ è dispari) ed essendo moltiplicata per x (dispari), otteniamo un numero dispari.

Secondo metodo (migliore del precedente): osserviamo che il prodotto di cinque numeri consecutivi è sempre pari (tra i cinque numeri ci sono, infatti, almeno due pari). Se il numero centrale è pari, la somma è pari in quanto gli addendi sono entrambi pari; se il numero centrale è dispari, la somma è dispari in quanto la potenza di un dispari è dispari mentre il prodotto è, come già detto, pari.

Verifica scritta 1A Scientifico 31/03/2009

Prof. Francesco Daddi

Punteggio di partenza = 2/10.
Gli esercizi 1 - 14 hanno punteggio = 0,45/10. Gli esercizi 15 - 18 hanno punteggio = 0,7/10.

Esercizio 1. Svolgi $(x-2\,y)(x+2\,y)-2(x-y)^2$.

Esercizio 2. Svolgi $(xy-2\,x^2)^4$ utilizzando il triangolo di Tartaglia.

Esercizio 3. Fattorizza $(x-2)(y+1)-(2-x)^2(xy-1)$.

Esercizio 4. Fattorizza $x^5-x^3-4\,x^2+4$.

Esercizio 5. Fattorizza $a^2-8\,ab+10\,a+16\,b^2-40\,b+24$.

Esercizio 6. Determina per quali valori di k il polinomio $x^4+x^3-7\,x^2-kx+6$ ha per radice $x=-3$. Fattorizza infine il polinomio ottenuto.

Esercizio 7. Tenendo conto del fatto che $x_1=-1$, $x_2=5$ e $x_3=-3$ sono radici del polinomio $-2\,x^5+8\,x^4+24\,x^3-68\,x^2-22\,x+60$, trova una fattorizzazione del polinomio. Scrivi infine tutte le radici del polinomio.

Esercizio 8. Scrivi un polinomio di secondo grado con le seguenti proprietà: ha per radici $x_1=4$ e $x_2=0$; il coefficiente della x è uguale a -7.

Esercizio 9. Calcola il quoziente e il resto della seguente divisione polinomiale:

$$\big((x^2+2\,x+1)(3\,x-2)-(x^2+5\,x+4)(2-x)\big):(x+1)\,.$$

senza eseguire la divisione.

Esercizio 10. Svolgi $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4\,x^2}{x^3+1}+\dfrac{2}{x+1}$

Esercizio 11. Svolgi $\dfrac{2}{(3\,x+1)^2}-\dfrac{4\,x}{1+3\,x}$

Esercizio 12. Svolgi $\dfrac{6\,x-2\,y+xy}{xy+5\,x-2\,y-10}+\dfrac{2\,x-1}{2-x}-\dfrac{6\,y}{5+y}$

Esercizio 13. Svolgi $\left(\dfrac{2}{z+y}-\dfrac{2}{z-y}\right):\dfrac{z^2}{z^2-zy}$

Esercizio 14. Svolgi $\dfrac{a^4-1}{a^4-4}\cdot\dfrac{a^4+2\,a^2}{a^4-a^2}-\dfrac{3\,a^4-6\,a^2}{3\,a^4-9\,a^2}\cdot\dfrac{a^4-9}{a^4-4\,a^2+4}$

Esercizio 15. Dimostra che la somma dei quadrati di due numeri dispari è pari ma non può essere il quadrato di un numero pari.

Esercizio 16. Dimostra che un numero formato da 5 cifre uguali è multiplo di 271 .

Esercizio 17. Dimostra che i numeri della forma $4\,x^2+12\,x+10$ sono tutti positivi.

Esercizio 18. Dimostra che la differenza delle seste potenze di due numeri dispari che differiscono di 10 è un multiplo di 40.

Soluzioni verifica scritta 1A Scientifico 31/03/2009 (fila 1)

Prof. Francesco Daddi

Esercizio 1. $(x-2\,y)(x+2\,y)-2(x-y)^2=-x^2-6\,y^2+4\,xy$.

Esercizio 2. $(xy-2\,x^2)^4=x^4y^4-8\,x^5y^3+24\,x^6y^2-32\,x^7y+16\,x^8$.

Esercizio 3. $(x-2)(y+1)-(2-x)^2(xy-1)=(2-x)(x^2y-2\,xy-x-y+1)$

Esercizio 4. $x^5-x^3-4\,x^2+4=(x-1)(x+1)(x^3-4)$.

Esercizio 5. $a^2-8\,ab+10\,a+16\,b^2-40\,b+24=(4\,b-a-5)^2-1=(4\,b-a-4)(4\,b-a-6)$.

Esercizio 6. Sostituendo $x=-3$ si trova $k=1$; la fattorizzazione risulta essere:

$$x^4+x^3-7\,x^2-x+6=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)\,.$$

Esercizio 7. Eseguendo la divisione del polinomio assegnato per il polinomio $(x+1)(x-5)(x+3)=x^3-x^2-17\,x-15$, si trova come quoziente $-2\,x^2+6\,x-4$; in definitiva, la fattorizzazione è $-2\,x^5+8\,x^4+24\,x^3-68\,x^2-22\,x+60=-2(x+1)(x-5)(x+3)(x-1)(x-2)$. Le radici del polinomio sono $x_1=-1$, $x_2=5$, $x_3=-3$, $x_4=1$ e $x_5=2$.

Esercizio 8. Il polinomio è del tipo $a(x-4)x=ax^2-4\,ax$; per far sì che il coefficiente della x sia uguale a -7, è sufficiente scegliere $a=\dfrac{7}{4}$. In definitiva il polinomio è $\dfrac{7}{4}\,x^2-7\,x$.

Esercizio 9. Osservando che $(x^2+2\,x+1)(3\,x-2)-(x^2+5\,x+4)(2-x)=(x+1)^2(3\,x-2)-(x+1)(x+4)(2-x)=(x+1)(4\,x^2+3\,x-10)$. Il quoziente della divisione, pertanto, è $4\,x^2+3\,x-10$, mentre il resto è nullo.

Esercizio 10. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4\,x^2}{x^3+1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x^3-2\,x^2+2\,x+3}{x(x+1)(x^2-x+1)}$.

Esercizio 11. $\dfrac{2}{(3\,x+1)^2}-\dfrac{4\,x}{1+3\,x}=\dfrac{2(1-6\,x^2-2\,x)}{(3\,x+1)^2}$.

Esercizio 12. $\dfrac{6\,x-2\,y+xy}{xy+5\,x-2\,y-10}+\dfrac{2\,x-1}{2-x}-\dfrac{6\,y}{5+y}=\dfrac{-7\,xy-4\,x+11\,y+5}{(5+y)(x-2)}$.

Esercizio 13. $\left(\dfrac{2}{z+y}-\dfrac{2}{z-y}\right):\dfrac{z^2}{z^2-zy}=-\dfrac{4\,y}{z(z+y)}$.

Esercizio 14. $\dfrac{a^4-1}{a^4-4}\cdot\dfrac{a^4+2\,a^2}{a^4-a^2}-\dfrac{3\,a^4-6\,a^2}{3\,a^4-9\,a^2}\cdot\dfrac{a^4-9}{a^4-4\,a^2+4}=-\dfrac{2}{a^2-2}$.

Esercizio 15. Indicati con $2\,x+1$ e con $2\,y-1$ i due numeri dispari, sviluppiamo la somma dei loro quadrati:

$$(2\,x+1)^2+(2\,y-1)^2=4\,x^2+4\,x+2+4\,y^2-4\,y$$

si tratta di un numero pari ma non è un multiplo di 4 in quanto può essere scritto come $4(x^2+x+y^2-y)+2$; si giunge alla conclusione tenendo conto del fatto che il quadrato di un numero pari deve avere 4 come divisore.

Esercizio 16. Un numero con 5 cifre uguali può essere scritto così: $10000\,g+1000\,g+100\,g+10\,g+g=11111\,g$; a questo punto basta osservare che $11111=271\cdot 41$.

Esercizio 17. Dato che risulta $4\,x^2+12\,x+10=(2\,x+3)^2+1$, si può concludere osservando che si tratta di una somma di 1 con una quantità non negativa.

Esercizio 18. Indicando con $(2\,x+5)$ e $(2\,x-5)$ i due dispari, notiamo che

$$(2\,x+5)^6-(2\,x-5)^6=1920\,x^5+40000\,x^3+75000\,x=40(48\,x^5+1000\,x^3+1875\,x)\,.$$

Verifica 1i - 31 marzo 2010

Esercizio 1

$x^2 - 6x + 8$

Esercizio 2

$x^2 - 3x - 40$

Esercizio 3

$x^2 - x - 12$

Esercizio 4

$x^2 + 9x + 14$

Esercizio 5

$x^2 y^5 - 5 x y^5 - 24 y^5$

Esercizio 6

$5x^3 + 15x^2 + 5x + 15$

Esercizio 7

$2x^3 y^4 + 6x^4 y^5 + 3x^5 y^6 + 9x^6 y^7$

Esercizio 8

$60x^8 y^4 - 20x^7 y^4 - 30x^6 y^4 + 10x^5 y^4$

Esercizio 9

$-15x^5 y^{10} - 45x^{10} y^5 + 30x^{10} y^{10} + 90x^{15} y^5$

Esercizio 10

$12x^9 y^4 - 21x^7 y^5 - 4x^6 y^7 + 7x^4 y^8$

Esercizio 11

$81x^6 y^{10} - 36x^2 y^4$

Esercizio 12

$4x^8 y^6 - x^2 y^4$

Esercizio 13

$(3x - 1 + y)^2 - (2x - 1 - 2y)^2$

Esercizio 14

$(x+y)^2 (x+y-1) - (x-y)^2 (x+y-1)$

Esercizio 15

$9x^4 - 12x^2 y + 4y^2 - 25x^2 y^8$

Esercizio 16

$16y^6 x^4 - x^2 + 4xy^2 - 4y^4$

Esercizio 17

$49x^4 y^{12} - 112x^2 y^6 + 64 - 4x^2 + 16xy^7 - 16y^{14}$

Esercizio 18

$4y^2 + 20yx^3 + 25x^6 - 25x^2 + 10x - 1$

Esercizio 19

$x^2 y^6 + 4xy^3 + 4 - 25y^{20} + 10y^{10} z - z^2$

Esercizio 20

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$

Soluzioni verifica del 31 marzo 2010 - Classe 1i

Esercizio 1
$x^2 - 6x + 8$
$(x - 2)(x - 4)$

Esercizio 2
$x^2 - 3x - 40$
$(x + 5)(x - 8)$

Esercizio 3
$x^2 - x - 12$
$(x + 3)(x - 4)$

Esercizio 4
$x^2 + 9x + 14$
$(x + 7)(x + 2)$

Esercizio 5
$x^2 y^5 - 5 x y^5 - 24 y^5$
$y^5 (x + 3)(x - 8)$

Esercizio 6
$5x^3 + 15x^2 + 5x + 15$
$5(x + 3)(x^2 + 1)$

Esercizio 7
$2x^3 y^4 + 6x^4 y^5 + 3x^5 y^6 + 9x^6 y^7$
$x^3 y^4 (3xy + 1)(3y^2 x^2 + 2)$

Esercizio 8
$60x^8 y^4 - 20x^7 y^4 - 30x^6 y^4 + 10x^5 y^4$
$10x^5 y^4 (3x - 1)(2x^2 - 1)$

Esercizio 9
$-15x^5 y^{10} - 45x^{10} y^5 + 30x^{10} y^{10} + 90x^{15} y^5$
$15x^5 y^5 (-1 + 2x^5)(3x^5 + y^5)$

Esercizio 10

$12x^9 y^4 - 21x^7 y^5 - 4x^6 y^7 + 7x^4 y^8$
$x^4 y^4 (-7y + 4x^2)(3x^3 - y^3)$

Esercizio 11
$81x^6 y^{10} - 36x^2 y^4$
$9x^2 y^4 (3y^3 x^2 - 2)(3y^3 x^2 + 2)$

Esercizio 12

$$4x^8y^6 - x^2y^4$$
$$x^2y^4(2yx^3-1)(2yx^3+1)$$

Esercizio 13

$$(3x-1+y)^2-(2x-1-2y)^2$$
$$(x+3y)(5x-2-y)$$

Esercizio 14

$$(x+y)^2(x+y-1)-(x-y)^2(x+y-1)$$
$$4xy(x+y-1)$$

Esercizio 15

$$9x^4-12x^2y+4y^2-25x^2y^8$$
$$(3x^2-2y-5xy^4)(3x^2-2y+5xy^4)$$

Esercizio 16

$$16y^6x^4-x^2+4xy^2-4y^4$$
$$(4y^3x^2+x-2y^2)(4y^3x^2-x+2y^2)$$

Esercizio 17

$$49x^4y^{12}-112x^2y^6+64-4x^2+16xy^7-16y^{14}$$
$$(7x^2y^6-2x-8+4y^7)(7x^2y^6+2x-8-4y^7)$$

Esercizio 18

$$4y^2+20yx^3+25x^6-25x^2+10x-1$$
$$(2y+5x^3-1+5x)(2y+5x^3+1-5x)$$

Esercizio 19

$$x^2y^6+4xy^3+4-25y^{20}+10y^{10}z-z^2$$
$$(z+2-5y^{10}+xy^3)(-z+2+5y^{10}+xy^3)$$

Esercizio 20

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$$
$$(x+y-z)^2$$

Esercizi sulla scomposizione di un polinomio - Francesco Daddi - 4 maggio 2010

Esercizio 1
$x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

$(x+1)(x-2)(x-5)$

Esercizio 2
$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$(x+2)(x-3)(x-2)$

Esercizio 3
$x^3 + x^2 - 10x + 8$

$(x-1)(x+4)(x-2)$

Esercizio 4
$x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

$(x-2)(x+3)(x-5)$

Esercizio 5
$x^3 - 8x^2 + 4x + 48$

$(x-4)(x+2)(x-6)$

Esercizio 6
$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$(x+2)(x+1)(x+3)$

Esercizio 7
$x^3 - 3x^2 - 28x + 60$

$(x-2)(x+5)(x-6)$

Esercizio 8
$x^3 - 4x^2 - x + 4$

$(x-1)(x-4)(x+1)$

Esercizio 9
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$(x-1)^3$

Esercizio 10
$x^3 - 3x^2 + 4$

$(x-2)^2(x+1)$

Esercizio 11
$x^3 - 7x^2 - 10x + 16$

$(x+2)(x-1)(x-8)$

Esercizio 12
$x^3 + 8x^2 - 21x - 108$

$(x-4)(x+3)(x+9)$

Esercizio 13
$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

$(x-1)(x+2)(x-3)(x-2)$

Esercizio 14
$x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-4)$

Esercizio 15
$x^4 - 15x^2 - 10x + 24$

$(x-1)(x-4)(x+3)(x+2)$

Esercizio 16
$x^4 - 4x^3 - 29x^2 + 156x - 180$

$(x-3)(x-2)(x+6)(x-5)$

Esercizio 17
$x^4 - 23x^2 - 18x + 40$

$(x-1)(x+2)(x-5)(x+4)$

Esercizio 18
$x^4 - 2x^3 - 49x^2 + 122x + 168$

$(x+7)(x-6)(x-4)(x+1)$

Esercizio 19
$x^4 - 13x^2 + 36$

$(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$

Esercizio 20
$x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 41x^2 + 12x - 36$

$(x-2)(x+1)(x-1)(x+3)(x-6)$

Liceo "I. Falchi" Montopoli in Val d'Arno

Verifica 1i - 26 maggio 2010 - Prof. Francesco Daddi

Nome e Cognome ________________________________

1) Scomporre il polinomio $x^2 y^4 - 6 x y^2 + 9 - 49 x^2 + 28 x y - 4 y^2$.

2) Scomporre il polinomio $5 x^2 - 15 x - 200$.

3) Scomporre il polinomio $x^{12} - 5 x^6 + 4$.

4) Scomporre il polinomio $x^3 + 5 x^2 + 2 x - 8$.

5) Scomporre il polinomio $x^3 - 7 x^2 + 7 x + 15$.

6) Calcolare il polinomio quoziente e il polinomio resto della divisione seguente:

$$(2 x^4 - x^2 + x) : (x^2 - 3 x + 2) \quad .$$

7) Calcolare il resto della divisione seguente:

$$(x^{54} - 34 x^{21} + 20 x^{14} - 2 x^8 + 5 x^3 - 2) : (x + 1) \quad .$$

8) Risolvere la seguente equazione: $(x-1)^2 - (x+3)^2 = x - 1$.

9) Risolvere la seguente equazione: $\dfrac{x-2}{2} - \dfrac{1-(x-2)^2}{4} = 1 - \dfrac{3x - x^2}{4}$.

10) Risolvere la seguente equazione:

$$\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{x-6}{6} + (x-2)(x+1) = \frac{-x^3+2}{6} - \frac{-6x^3-10}{12} + 2(x-1)^2 \quad .$$

Liceo "I. Falchi" Montopoli in Val d'Arno
Soluzione verifica 1i - 26 maggio 2010 - Prof. Francesco Daddi

1) *Scomporre il polinomio* $x^2 y^4 - 6 x y^2 + 9 - 49 x^2 + 28 x y - 4 y^2$.

Soluzione. Si tratta di una differenza di due quadrati:

$$(x y^2 - 3)^2 - (7x - 2y)^2 = (x y^2 - 3 + 7x - 2y)(x y^2 - 3 - 7x + 2y)$$

2) *Scomporre il polinomio* $5x^2 - 15x - 200$.

Soluzione. Mettiamo in evidenza 5, ottenendo $5x^2 - 15x - 200 = 5(x^2 - 3x - 40)$; a questo punto basta scomporre il polinomio tra parentesi con la regola della somma e del prodotto: possiamo quindi scrivere $5x^2 - 15x - 200 = 5(x+5)(x-8)$.

3) *Scomporre il polinomio* $x^{12} - 5x^6 + 4$.

Soluzione. Ponendo $x^6 = t$ il polinomio può essere scritto così: $t^2 - 5t + 4$; scomponendo il polinomio di secondo grado con la regola della somma e del prodotto si arriva alla scomposizione $x^{12} - 5x^6 + 4 = (x^6 - 4)(x^6 - 1)$.
Continuando a scomporre troviamo:
$x^{12} - 5x^6 + 4 = (x-1)(x+1)(x^3-2)(x^3+2)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

4) *Scomporre il polinomio* $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$.

Soluzione. Si osserva che una radice del polinomio è $x = 1$; dividendo il polinomio di terzo grado per il binomio $(x-1)$ troviamo come quoziente $x^2 + 6x + 8$; scomponendo il polinomio quoziente con la regola della somma e del prodotto si trova $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = (x-1)(x+2)(x+4)$.

5) *Scomporre il polinomio* $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$.

Soluzione. Si osserva che una radice del polinomio è $x = -1$; dividendo il polinomio di terzo grado per il binomio $(x+1)$ troviamo come quoziente $x^2 - 8x + 15$; scomponendo ora il polinomio quoziente con la regola della somma e del prodotto si trova la fattorizzazione del polinomio di partenza: $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x+1)(x-3)(x-5)$.

6) *Calcolare il quoziente e il resto della divisione seguente:* $(2x^4 - x^2 + x) : (x^2 - 3x + 2)$.

Soluzione. Svolgendo i calcoli troviamo: $Q(x) = 2x^2 + 6x + 13$; $R(x) = 28x - 26$.

E' possibile fare la verifica: $(x^2 - 3x + 2) \cdot (2x^2 + 6x + 13) + 28x - 26 = 2x^4 - x^2 + x$.

7) *Calcolare il resto della divisione seguente:* $(x^{54}-34x^{21}+20x^{14}-2x^{8}+5x^{3}-2):(x+1)$.

Soluzione. Basta applicare il teorema del resto:

$$p(-1)=(-1)^{54}-34\cdot(-1)^{21}+20\cdot(-1)^{14}-2\cdot(-1)^{8}+5\cdot(-1)^{3}-2=1+34+20-2-5-2=46$$

8) *Risolvere la seguente equazione:* $(x-1)^2-(x+3)^2=x-1$.

Soluzione. Svolgiamo i calcoli algebrici:

$$x^2-2x+1-(x^2+6x+9)=x-1\rightarrow x^2-2x+1-x^2-6x-9=x-1$$

$$-8x-8=x-1\rightarrow -9x=7\rightarrow x=\frac{7}{-9}\rightarrow x=-\frac{7}{9} \quad .$$

9) *Risolvere la seguente equazione:* $\frac{x-2}{2}-\frac{1-(x-2)^2}{4}=1-\frac{3x-x^2}{4}$.

Soluzione. Svolgendo i calcoli troviamo:

$$\frac{2(x-2)-\left[1-(x-2)^2\right]}{4}=\frac{4-(3x-x^2)}{4}$$

$$2x-4-\left[1-(x^2+4-4x)\right]=4-3x+x^2\rightarrow 2x-4-\left[1-x^2-4+4x\right]=4-3x+x^2$$

$$2x-4-\left[-x^2-3+4x\right]=4-3x+x^2\rightarrow 2x-4+x^2+3-4x=4-3x+x^2$$

$$x=5 \quad .$$

10) *Risolvere la seguente equazione:*

$$\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{x-6}{6}+(x-2)(x+1)=\frac{-x^3+2}{6}-\frac{-6x^3-10}{12}+2(x-1)^2 \quad .$$

Soluzione. Svolgendo i calcoli troviamo:

$$\frac{4(x+1)^3-2(x-6)+12(x-2)(x+1)}{12}=\frac{2(-x^3+2)-(-6x^3-10)+12\cdot 2(x-1)^2}{12}$$

$$4(x+1)^3-2(x-6)+12(x-2)(x+1)=2(-x^3+2)-(-6x^3-10)+12\cdot 2(x-1)^2$$

$$4(x^3+3x^2+3x+1)-2x+12+12(x^2+x-2x-2)=-2x^3+4+6x^3+10+24(x^2+1-2x)$$

$$4x^3+12x^2+12x+4-2x+12+12x^2+12x-24x-24=-2x^3+4+6x^3+10+24x^2+24-48x$$

$$-2x-12=34-48x$$

$$46x=46\rightarrow x=1 \quad .$$