

Soluzione della verifica di Matematica 2^a A
assenti del 3 marzo 2011

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Soluzione.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{array}$$

Esercizio 2. Risolvere l'equazione $2x^2 - x - 3 = 0$

Soluzione.

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1. \end{array}$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $3x - 3 = x^2$

Soluzione.

$$3x - 3 = x^2 \Rightarrow -x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 9 - 12 = -3 < 0 \Rightarrow \text{nessuna soluzione.}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione $x^2 - 4x = -10 + 3x$

Soluzione.

$$x^2 - 4x = -10 + 3x \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 10 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{cases}$$

Esercizio 5. Risolvere l'equazione $(x - 3)(x + 1) = 3(x + 1)^2$

Soluzione.

$$\begin{aligned} (x - 3)(x + 1) = 3(x + 1)^2 &\Rightarrow x^2 + x - 3x - 3 = 3(x^2 + 1 + 2x) \Rightarrow \\ x^2 - 2x - 3 = 3x^2 + 3 + 6x &\Rightarrow -2x^2 - 8x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \searrow x_2 = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3. \end{cases}$$

Esercizio 6. Risolvere l'equazione $2(x + 3) = 6 - x^2$

Soluzione.

$$2(x + 3) = 6 - x^2 \Rightarrow 2x + 6 = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 + 2x = 0.$$

Si tratta di un'equazione spuria; mettiamo in evidenza una x :

$$x(x + 2) = 0 \begin{cases} \nearrow x_1 = 0 \\ \searrow x_2 = -2. \end{cases}$$

Esercizio 7. Risolvere l'equazione $10000x^2 - 40000x + 40000 = 0$

Soluzione. Dividiamo tutto per 10000:

$$10000x^2 - 40000x + 40000 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \text{ (2 soluzioni coincidenti)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \searrow x_2 = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{cases}$$

Esercizio 8. Risolvere l'equazione $(x-1)^2(x+2) + 7 = x^2(x+1) - 3x$

Soluzione.

$$(x-1)^2(x+2) + 7 = x^2(x+1) - 3x \Rightarrow (x^2 - 2x + 1)(x+2) + 7 = x^3 + x^2 - 3x \Rightarrow$$

$$\cancel{x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{4x} + \cancel{x} + 2 + 7 = \cancel{x^3} + x^2 - \cancel{3x} \Rightarrow -x^2 + 9 = 0$$

si tratta di un'equazione pura; si ha

$$x^2 = 9 \begin{cases} \nearrow x_1 = \sqrt{9} = 3 \\ \searrow x_2 = -\sqrt{9} = -3. \end{cases}$$

Esercizio 9. Risolvere l'equazione $\frac{(x-3)^2}{2} = 1 - \frac{(x+1)(x-2)}{4}$

Soluzione.

$$\frac{2(x^2 - 6x + 9)}{4} = \frac{4 - (x^2 - 2x + x - 2)}{4} \Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 4 - x^2 + 2x - x + 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 13x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -13 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 169 - 144 = 25 > 0 \text{ (2 soluzioni)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm 5}{6} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{13+5}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{13-5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Esercizio 10. Risolvere l'equazione $(2-x)^3 + (x+1)^3 = 7$

Soluzione.

$$8 - 12x + 6x^2 - x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 7 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = -9 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-9)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 81 - 72 = 9 > 0 \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 9} = \frac{9 \pm 3}{18} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{9+3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ \searrow x_2 = \frac{9-3}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 11. Risolvere l'equazione $\frac{1}{3} - \frac{x-2}{6} = x^2 + 1$

Soluzione.

$$\frac{2 - (x-2)}{6} = \frac{6x^2 + 6}{6} \Rightarrow 2 - x + 2 = 6x^2 + 6 \Rightarrow -6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow 6x^2 + x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1 - 48 = -47 < 0 \Rightarrow \text{nessuna soluzione.}$$

Esercizio 12. Risolvere l'equazione $\frac{(2x-1)^2}{10} = \frac{3-x}{5} - \frac{1}{2}$

Soluzione.

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{10} = \frac{2(3-x) - 5}{10} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 6 - 2x - 5 \Rightarrow 4x^2 - 2x = 0;$$

si tratta di un'equazione spuria; mettiamo in evidenza una x :

$$x(4x-2) = 0 \begin{cases} \nearrow x_1 = 0 \\ \searrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 13. Risolvere l'equazione $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x - 3)^2 + x^3(1 - x) = x(1 - 4x^2) - 1$

Soluzione.

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)(x^2 - 6x + 9) + x^3 - x^4 = x - 4x^3 - 1 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{6x^3} + 9x^2 + \cancel{x^3} - 6x^2 + 9x + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \cancel{x^3} - \cancel{x^4} - x + 4x^3 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{36x^2 - 24x^2 + 36x + x^2 - 6x + 9 - 4x + 4}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow 13x^2 + 26x + 13 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \quad (2 \text{ soluzioni coincidenti})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{-2 + 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-2 - 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1. \end{matrix}$$

Esercizio 14. Risolvere l'equazione $(3x - 987654321)^2 = (123456789 - 2x)^2$

Soluzione.

$$3x - 987654321 = \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} 123456789 - 2x \\ -(123456789 - 2x) \end{matrix};$$

risolvendo le due equazioni di primo grado si ottengono le due soluzioni:

$$x_1 = 222222222 \quad ; \quad x_2 = 864197532.$$