Soluzioni verifica di Matematica - Classe 2^aA - 28 ottobre 2011

Esercizio 1. *Determinare l'equazione della circonferenza avente come diametro il segmento di estremi* $A(-2,7)$*,* $B(6,-1)$.

Soluzione. Il centro è il punto medio del segmento di estremi A, B: $C(2,3)$. Il raggio è $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{32}$. L'equazione è $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 32$.

Esercizio 2. *Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti* $P_1(0,2)$*,* $P_2(4,4)$*,* $P_3(6,2)$.

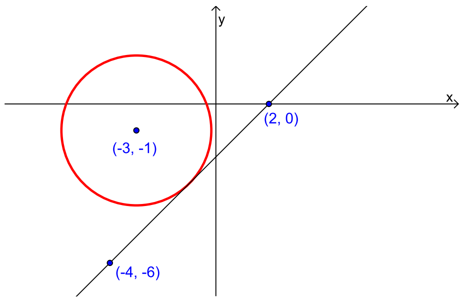
Soluzione. Il centro C si ottiene intersecando l'asse del segmento P_1P_3 ($x=3$) con l'asse del segmento P_2P_3 ($x-y-2=0$): si trova $C(3,1)$. Il raggio è $r = \overline{CP_1} = \sqrt{10}$. L'equazione è $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$.

Esercizio 3. *Data la circonferenza* γ *di centro* $C(-5,2)$ *e passante per* $P(-1,-3)$*, determinare l'equazione della retta tangente a* γ *in* P. **Soluzione.** La retta tangente passa per P ed ha pendenza pari a $-\frac{1}{\text{pendenza}(CP)} = \frac{4}{5}$, quindi la sua equazione è $y = \frac{4}{5}(x+1) - 3$ $\left(\text{quindi } y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5} \text{ ovvero } 4x - 5y - 11 = 0\right)$.

Esercizio 4. *Determinare le coordinate dei punti* P*,* Q *di intersezione della circonferenza* $\gamma: x^2+y^2+4x-4y-2=0$ *con la retta* $r: x+y=2$. *E' possibile determinare la lunghezza della corda* $\overline{PQ}$ *senza fare uso delle coordinate degli estremi? Spiega.* **Soluzione.** Basta risolvere il sistema tra la retta e la circonferenza per sostituzione, ad esempio ponendo $y = 2-x$. Si trovano i punti $P(1,1)$, $Q(-3,5)$. Dato che il centro di γ è $C(-2,2)$ ed il raggio misura $\sqrt{10}$, indicata con H la proiezione ortogonale di C sulla retta r, per determinare la lunghezza della corda PQ basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo CHP, retto in H: $\overline{PQ} = 2\cdot\overline{PH} = 2\cdot\sqrt{\text{raggio}^2 - d^2(C,r)} = 2\cdot\sqrt{10-2} = 4\sqrt{2}$.

Esercizio 5. *Determinare l'equazione della circonferenza tangente alla retta* $t: x-y-3=0$ *nel punto* $T(2,-1)$ *e passante per* $A(-4,-3)$. **Soluzione.** Il centro C si trova intersecando la retta perpendicolare a t e passante per T ($x+y-1=0$) con l'asse del segmento AT ($3x+y+5=0$): si trova $C(-3,4)$. Il raggio è $r = \overline{CT} = \sqrt{50}$, quindi l'equazione della circonferenza è $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 50$.

Esercizio 6. *Nella figura la circonferenza* γ *è tangente alla retta. Scrivi l'equazione di* γ.



Soluzione. La retta tangente t passa per A e B, quindi ha equazione $t: y = x-2$, ovvero $t: x-y-2=0$.
Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza di C da tale retta: $r = \frac{|-3-(-1)-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$.
L'equazione cercata, pertanto, è $\gamma: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 8$.
Il punto T di tangenza si trova intersecando la retta $y = x-2$ con la retta passante per $C(-3,-1)$ e perpendicolare alla retta tangente, di equazione $y = -x-4$; si trova $T(-1,-3)$.

Esercizio 7. *Data la circonferenza* γ *di centro* $C(2,-3)$ *e raggio* $\sqrt{8}$*, determinare le equazioni delle rette parallele alla retta* $x-y=0$ *e tangenti a* γ. **Soluzione.** Le parallele alla retta assegnata sono del tipo $y = x+k$; imponendo che C abbia distanza pari a $\sqrt{8}$ dalla retta generica si trova: $\frac{|2-(-3)+k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \Rightarrow |5+k| = 4$, da cui $k_1 = -1$, $k_2 = -9$. Le rette cercate, pertanto, sono $y = x-1$ e $y = x-9$.

Esercizio 8. *Data la circonferenza* $\gamma: x^2+y^2+2x-4y-4=0$*, determinare le equazioni delle rette uscenti dal punto* $P(2,8)$ *e tangenti a* γ. *Si calcolino anche le coordinate dei punti* A*,* B *di tangenza.*

Soluzione. Il centro di γ è $C(-1,2)$, mentre il suo raggio misura 3. Non è difficile vedere che una retta tangente è parallela all'asse y ed ha equazione $t_1: x = 2$ (tangente a γ in $A(2,2)$). Per determinare l'altra tangente scriviamo l'equazione della retta generica per P, $t: y = m(x-2)+8$ ed imponiamo che risulti $d(C,t) = \text{raggio} \Rightarrow \frac{|m(-1-2)-2+8|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$: si trova $m = \frac{3}{4}$, da cui $t_2: y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$, tangente a γ in $B\left(-\frac{14}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Esercizio 9. *Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alla retta* $t: x+2y+2=0$ *nel punto* $T(-2,0)$ *e tangenti ulteriormente alla retta* s *avente pendenza* -2 *e passante per il punto* $P(2,-2)$.

Soluzione. La retta s ha equazione $y = -2x+2$. Le bisettrici delle rette r, s hanno equazioni $b_1: x+y=0$, $b_2: x-y-4=0$. Indicata con p la retta passante per T e perpendicolare a t, di equazione $p: 2x-y+4=0$, i centri delle circonferenze che risolvono l'esercizio sono $C_1 = p\cap b_1 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e $C_2 = p\cap b_2 = (-8,-12)$; i raggi si trovano calcolando $\overline{C_1T}$ e $\overline{C_2T}$. Le circonferenze, pertanto, sono $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$ e $(x+8)^2 + (y+12)^2 = 180$.

Esercizio 10. *Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette* $t_1: x-y=0$*,* $t_2: x+y=0$ *e passanti per il punto* $P(-2,6)$. **Soluzione.** Non è difficile vedere che i centri delle circonferenze si trovano sul semiasse positivo delle ordinate, quindi $C(0,t)$ con $t>0$. Poiché $\overline{CP} = d(C,t_1)$, risulta $\sqrt{(0+2)^2+(t-6)^2} = \frac{|0-t|}{\sqrt{2}}$, da cui $t_1 = 4$, $t_2 = 20$; i centri quindi sono $C_1(0,4)$ e $C_2(0,20)$ ed i rispettivi raggi sono $r_1 = \sqrt{8}$ e $r_2 = \sqrt{200}$. Le circonferenze, pertanto, sono $x^2 + (y-4)^2 = 8$ e $x^2 + (y-20)^2 = 200$.