Soluzione verifica di Matematica
5^aE Liceo Scientifico - 12/12/2013

Problema. *Si studi in modo dettagliato la funzione* $f(x) = \dfrac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}}$ *tracciandone un grafico accurato.*

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La funzione non è né pari né dispari. La funzione è positiva sugli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(2, +\infty)$; $f(x)$ è negativa sull'intervallo $(1, 2)$. Il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = 2$, mentre interseca l'asse y nel punto di ordinata 2. Calcoliamo il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{(+\infty)\cdot 1}{1} = +\infty\,;$$

calcoliamo ora il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{(-\infty)\cdot 1}{-1} = +\infty\,.$$

Vediamo se ci sono asintoti obliqui. Calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = 1\,;$$

se c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ esso ha pendenza (coefficiente angolare) $m = 1$; ora calcoliamo il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\,x + 2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3\,x + 2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x^2 - 3\,x + 2 + x\sqrt{x^2+1}}{x^2 - 3\,x + 2 + x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2 - 3\,x + 2)^2 - x^2\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x^2 - 3\,x + 2 + x\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6\,x^3 + 12\,x^2 - 12\,x + 4}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x^2 - 3\,x + 2 + x\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(-6 + \dfrac{12}{x} - \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right)}{x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\cdot\left[x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) + x^2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(-6 + \dfrac{12}{x} - \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\cdot\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\cdot\left[1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right]} = \frac{-6}{1\cdot[1+1]} = -3\,;$$

la funzione $f(x)$ ha pertanto come asintoto obliquo destro la retta di equazione $y = x - 3$.

Omettiamo ora i calcoli del tutto analoghi per $x \to -\infty$ grazie ai quali si scopre che la funzione $f(x)$ ha come asintoto obliquo sinistro la retta di equazione $y = -x + 3$.

È interessante determinare le eventuali intersezioni del grafico di $f(x)$ con i suoi asintoti obliqui; risulta

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}} \\ y = x - 3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \text{nessuna soluzione;}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x^2+1}} \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(1 - \sqrt{\frac{8}{3}}\ ;\ 2 + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)\ ,\ B\left(1 + \sqrt{\frac{8}{3}}\ ;\ 2 - \sqrt{\frac{8}{3}}\right).$$

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2\,x-3)\cdot\sqrt{x^2+1} - (x^2-3\,x+2)\cdot\dfrac{\cancel{2}\,x}{\cancel{2}\,\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\dfrac{(2\,x-3)\cdot(x^2+1)-(x^2-3\,x+2)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\dfrac{x^3-3}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^3-3}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)} = \frac{x^3-3}{(x^2+1)^{3/2}}\,;$$

la funzione decresce sull'intervallo $(-\infty, \sqrt[3]{3})$ e cresce sull'intervallo $(\sqrt[3]{3}, +\infty)$; la funzione assume un *minimo assoluto* nel suo punto di ascissa $x = \sqrt[3]{3}$.

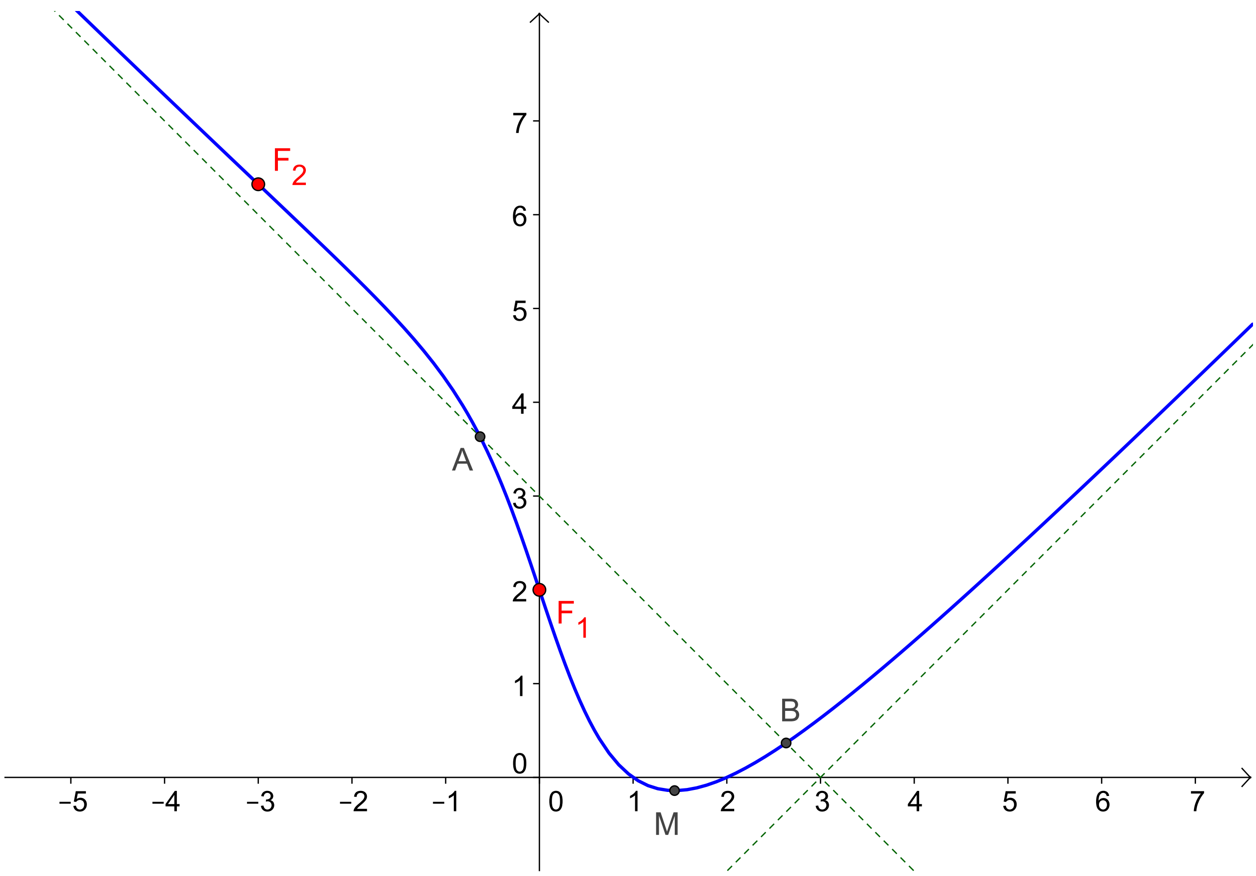
Calcoliamo ora la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{3\,x^2\cdot(x^2+1)^{3/2} - (x^3-3)\cdot\dfrac{3}{\cancel{2}}\cdot(x^2+1)^{1/2}\cdot\cancel{2}\,x}{\left[(x^2+1)^{3/2}\right]^2} =$$

$$= \frac{3\,x^2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+1)^{1/2} - (x^3-3)\cdot 3\cdot(x^2+1)^{1/2}\cdot x}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^2+1)^{1/2}\cdot\left[3\,x^2\cdot(x^2+1)-(x^3-3)\cdot 3\,x\right]}{(x^2+1)^3} =$$

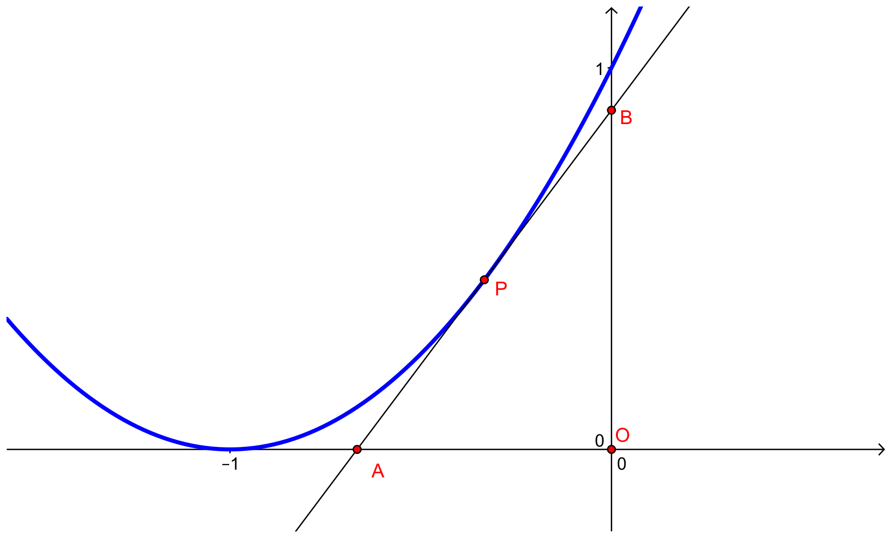
$$= \frac{(x^2+1)^{1/2}}{(x^2+1)^3}\cdot(3\,x^2+9\,x) = \frac{3\,x^2+9\,x}{(x^2+1)^{3-\frac{1}{2}}} = \frac{3\,x\,(x+3)}{(x^2+1)^{5/2}}\,;$$

dallo studio di $f''(x)$ si scopre che la funzione volge la concavità verso l'alto nell'intervallo $(-3, 0)$, volge la concavità verso il basso negli intervalli $(-\infty, -3)$ e $(0, +\infty)$; la funzione $f(x)$ prensenta pertanto un flesso discendente per $x = -3$ ed un flesso ascendente per $x = 0$.



Quesito 1. *Data la parabola di equazione* $y = x^2 + 2x + 1$, *si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi cartesiani, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima.*

Soluzione. Il generico punto P dell'arco di parabola considerato ha coordinate $P(t\,;\,t^2+2t+1)$ con $-1<t<0$; la retta tangente in P alla parabola ha equazione $y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t+1$ ed incontra l'asse delle ascisse nel punto $A\left(\dfrac{t^2-1}{2t+2}\,;\,0\right)$ che possiamo semplificare in $A\left(\dfrac{t-1}{2}\,;\,0\right)$ e l'asse delle ordinate nel punto $B(0\,;\,1-t^2)$.



L'area S del triangolo OAB è

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{t-1}{2}\right|\cdot\left|1-t^2\right|$$

poiché si ha $-1<t<0$ risulta

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{2}\cdot(1-t^2)=\frac{1}{4}\cdot(1-t)(1-t^2)=\frac{1}{4}\cdot(1-t)(1-t)(1+t)=\frac{1}{4}\cdot(1-t)^2(1+t)\,.$$

Derivando S si ottiene

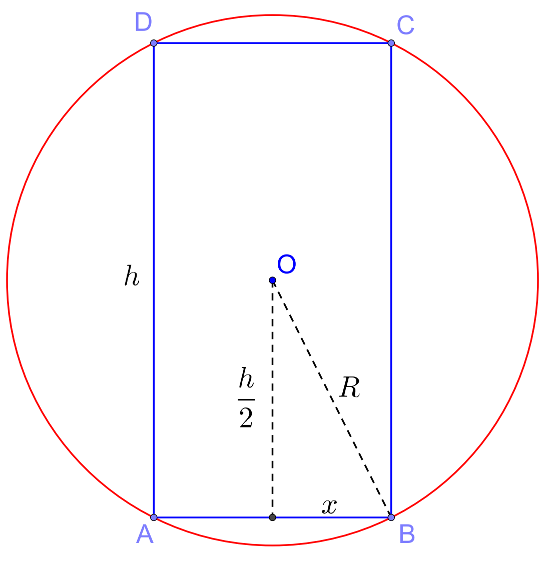
$$S'=\frac{1}{4}\cdot\left[2(1-t)\cdot(-1)\cdot(1+t)+(1-t)^2\cdot 1\right]=\frac{1}{4}\cdot\left(3t^2-2t-1\right)=\frac{1}{4}\cdot(3t+1)(t-1)\,;$$

dallo studio del segno di S' si scopre che l'area massima si ottiene per $t=-\dfrac{1}{3}$; il punto P ha pertanto coordinate $P\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{4}{9}\right)$ e la retta tangente ha equazione cartesiana $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{8}{9}$.

Quesito 2. *Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio* R, *determinare quello avente superficie laterale massima.*

Soluzione. Poniamo $x=$ raggio del cilindro inscritto; le sue limitazioni sono $0\le x\le R$. L'altezza del cilindro è $h=2\sqrt{R^2-x^2}$, quindi la sua superficie laterale è

$$S_L(x)=2\pi x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}=4\pi x\sqrt{R^2-x^2}=4\pi\sqrt{R^2x^2-x^4}\,.$$



Per massimizzare la funzione $S_L(x)$ è sufficiente massimizzare il radicando $g(x) = R^2\,x^2 - x^4$ e, a tale scopo, calcoliamo la sua derivata prima:

$$g'(x) = 2\,R^2\,x - 4\,x^3 = 2\,x(R^2 - 2\,x^2)$$

dallo studio del segno di $g'(x)$ e tenendo conto che $0 \leq x \leq R$, si scopre che $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ è il raggio del cilindro inscritto con la superficie laterale massima.

Quesito 3. *Si calcoli il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x) - 1}{x \cdot \ln(2\,x+1)}\,.$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x) - 1}{x \cdot \ln(2\,x+1)} = \lim_{x\to 0}\; - \frac{1-\cos(3\,x)}{(3\,x)^2} \cdot (3\,x)^2 \cdot \frac{2\,x}{\ln(2\,x+1)} \cdot \frac{1}{2\,x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\; - \frac{1-\cos(3\,x)}{(3\,x)^2} \cdot \frac{2\,x}{\ln(2\,x+1)} \cdot \frac{9\,\cancel{x^2}}{2\,\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}\,.$$

In alternativa, è possibile calcolare il limite ricorrendo al teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x) - 1}{x \cdot \ln(2\,x+1)} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3\,\sin(3\,x)}{\ln(2\,x+1) + \dfrac{2\,x}{2\,x+1}} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-9\,\cos(3\,x)}{\dfrac{2}{2\,x+1} + \dfrac{2}{(2\,x+1)^2}} = \frac{-9\cdot 1}{2+2} = -\frac{9}{4}\,.$$

Quesito 4. *Data la curva $\gamma : y = x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1$ si dimostri che essa ha un unico punto di flesso F, di cui si chiedono le coordinate. Si scriva poi l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta r passante per il punto F e parallela all'asse delle x.*

Soluzione. Seguiamo il metodo delle derivate successive. La derivata seconda è $y'' = 6\,x - 6$ e si annulla solo in $x = 1$. La derivata terza è $y''' = 6 \neq 0$ e quindi si ha un unico punto di flesso F di ascissa $x = 1$ (si noti che il flesso è ascendente in quanto la derivata terza è > 0); l'ordinata di F è $= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = -1$.

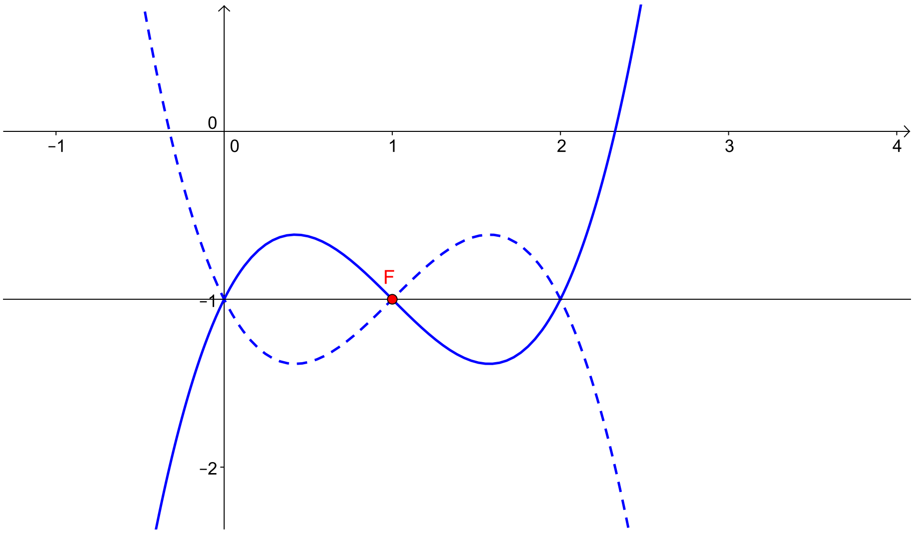
In alternativa al metodo delle derivate successive è possibile analizzare il segno della derivata seconda $y'' = 6\,x - 6$, scoprire che si ha un cambio di segno (da negativo a positivo) in corrispondenza di $x = 1$ e concludere che si ha un flesso ascendente avente ascissa $x = 1$.

La retta passante per F e parallela all'asse x ha equazione $y = -1$, le equazioni della simmetria assiale rispetto ad essa sono

$$\begin{cases} x' = x \\ \dfrac{y + y'}{2} = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y - 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = x' \\ y = -y' - 2 \end{cases}$$

La curva assegnata $y = x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1$ viene trasformata nella curva

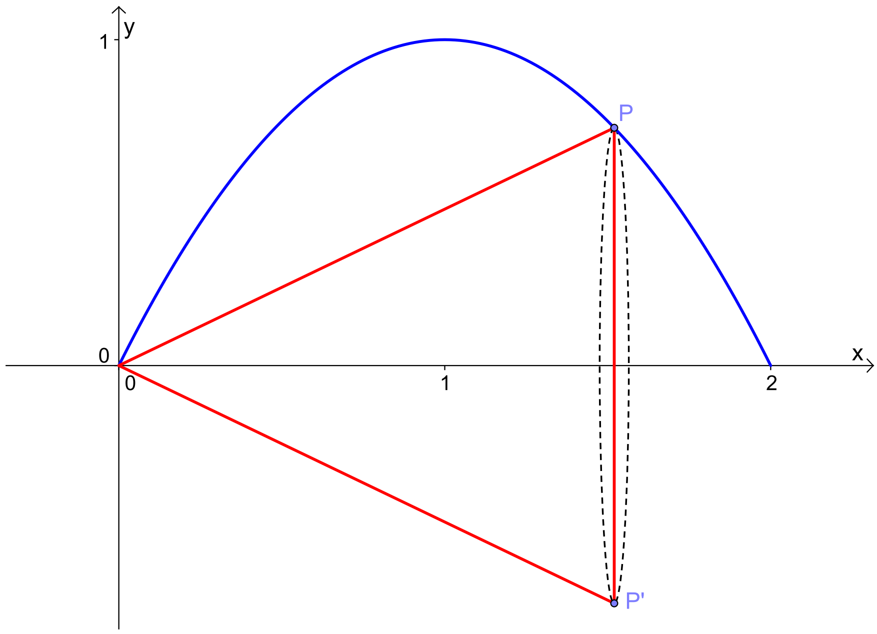
$$-y' - 2 = (x')^3 - 3\,(x')^2 + 2\,x' - 1 \quad \text{ossia} \quad y' = -(x')^3 + 3\,(x')^2 - 2\,x' - 1\,.$$



Quesito 5. *Si consideri la parabola di equazione cartesiana $y = -x^2 + 2\,x$. Si determini il punto P del suo arco contenuto nel primo quadrante in modo che il cono generato dalla rotazione attorno all'asse x del segmento OP abbia volume massimo.*

Soluzione. Preso il generico punto $P(t, 2\,t - t^2)$ con $0 \leq t \leq 2$, il cono ha volume

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,y_P^2\,x_P = \frac{1}{3}\,\pi\,(2\,t - t^2)^2\,t\,.$$



Derivando V si ottiene

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left[2\,(2\,t-t^2)(2-2\,t)\,t+(2\,t-t^2)^2\right] = \frac{1}{3}\pi\,(2\,t-t^2)\left[2\,(2-2\,t)\,t+2\,t-t^2\right] = \frac{1}{3}\pi\,(2\,t-t^2)\left(6\,t-5\,t^2\right)$$

dallo studio del segno si osserva che il volume massimo si ottiene per $t=\dfrac{6}{5}$ e quindi il punto P richiesto ha coordinate $P\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{24}{25}\right)$.

Quesito 6. *Si determinino i coefficienti λ e μ in modo che si possa applicare il teorema di Rolle alla funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+\lambda\,x & \textit{se } x<0 \\ \mu\,x^3+2\,x & \textit{se } x\geq 0 \end{cases} \qquad \textit{sull'intervallo } [-1,1]\,.$$

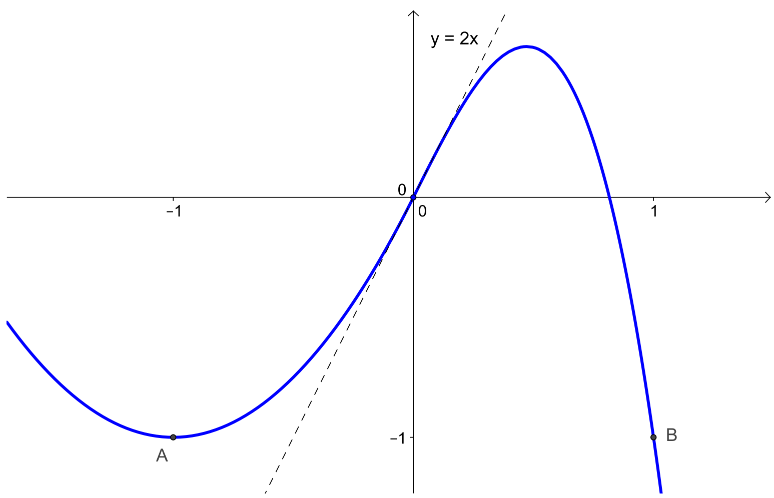
Si determini infine il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema suddetto.

Soluzione. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \\ f(-1) = f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0^2+\lambda\cdot 0 = 0 \\ \mu\cdot 0^3+2\cdot 0 = 0 \\ 2\cdot 0+\lambda = \mu\cdot(3\cdot 0^2)+2 \\ (-1)^2+\lambda\cdot(-1) = \mu\cdot 1^3+2\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ \lambda = 2 \\ 1-\lambda = \mu+2 \end{cases}$$

si ricava $\lambda = 2$, $\mu = -3$. La funzione pertanto è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2\,x & \text{se } x<0 \\ -3\,x^3+2\,x & \text{se } x\geq 0 \end{cases} \quad \text{ed è tangente nell'origine alla retta di equazione } y = 2\,x\,.$$



Per determinare i punti interni all'intervallo $[-1,1]$ in cui la derivata si annulla è sufficiente annullare la derivata per $x<0$

$$2\,x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1 \;\text{ non accettabile in quanto } \notin (-1,1)$$

e per $x \geq 0$

$$-9\,x^2+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3} \;\text{ ed è accettabile solo la radice positiva.}$$

In definitiva si ha un unico punto, di ascissa $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Quesito 7. *Dopo aver scritto l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y e passanti per i punti $A(1,1)$ e $B(-1,-1)$, si determini l'equazione del luogo geometrico descritto dai loro vertici, individuandone gli asintoti.*
Soluzione. Per prima cosa scriviamo l'equazione della generica parabola con asse parallelo all'asse y: $y=a\,x^2+b\,x+c$. Imponendo poi il passaggio dai punti $A(1,1)$ e $B(-1,-1)$ si ha il sistema

$$\begin{cases} 1=a+b+c \\ -1=a-b+c \end{cases}$$

da cui ricaviamo $b=1$ e $c=-a$; il fascio di parabole ha pertanto equazione $y=a\,x^2+x-a$.

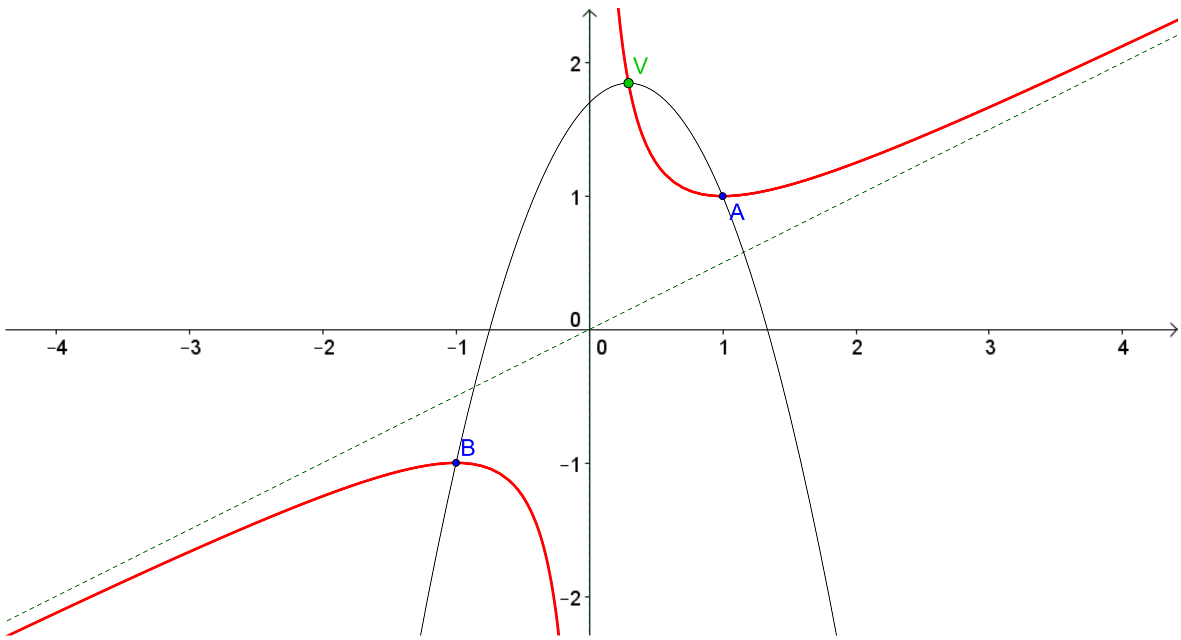
Il vertice della generica parabola del fascio è $V\left(-\dfrac{1}{2\,a}\,;\,-\dfrac{1+4\,a^2}{4\,a}\right)$ e quindi il luogo geometrico richiesto ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2\,a} \\[2ex] y=-\dfrac{1+4\,a^2}{4\,a} \end{cases} \qquad \text{con } a\neq 0$$

per ottenere un'equazione cartesiana del luogo nelle sole variabili x, y occorre eliminare il parametro a, ricavandolo dalla prima e sostituendolo nella seconda equazione:

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2\,x} \\[2ex] y=-\dfrac{1+4\cdot\left(-\dfrac{1}{2\,x}\right)^2}{4\cdot\left(-\dfrac{1}{2\,x}\right)}=\dfrac{x^2+1}{2\,x}\,. \end{cases}$$

In definitiva il luogo dei vertici è l'iperbole di equazione cartesiana $y=\dfrac{x^2+1}{2\,x}$ che ha come asintoti le rette $x=0$ (l'asse delle ordinate) e $y=\dfrac{x}{2}$.



Nella figura si osserva una parabola che passa per i punti $A(1,1)$ e $B(-1,-1)$ con il suo vertice che appartiene all'iperbole $y=\dfrac{x^2+1}{2\,x}$.