Soluzione verifica di Matematica
5^aE Liceo Scientifico - assenti del 12/12/2013

Problema. *Si studi in modo dettagliato la funzione*

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}}$$

tracciandone un grafico accurato.

Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. La funzione non è né pari né dispari. Osservando che, per $x \neq 0$, risulta $e^{\frac{1}{x}} > 0$, la funzione $f(x)$ è positiva sugli intervalli $(-6, 0)$ e $(0, +\infty)$, mentre è negativa sull'intervallo $(-\infty, -6)$. La funzione ha un solo zero nel punto di ascissa $x = -6$ e non interseca l'asse delle y.

Vediamo il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} = (+\infty + 2) \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^{0^+} = +\infty \cdot 1 = +\infty\,;$$

vediamo ora il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} = (-\infty + 2) \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^{0^-} = -\infty \cdot 1 = -\infty\,;$$

vediamo ora il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} = (0 + 2) \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 2 \cdot e^{+\infty} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

quindi la funzione ammette la retta $x = 0$ (asse delle ordinate) come asintoto verticale destro; vediamo ora il limite di $f(x)$ per $x \to 0^-$:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} = (0 + 2) \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot 0 = 0\,.$$

Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{+\infty}\right) \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = \left(\frac{1}{3} + 0\right) \cdot e^{0^+} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\,;$$

se esiste un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ il suo coefficiente angolare deve essere $m = \frac{1}{3}$; vediamo l'intercetta all'origine:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{3} \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} e^{\frac{1}{x}} - \frac{x}{3} + 2\,e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2\,e^{\frac{1}{x}}$$

poiché $\lim_{x\to+\infty} 2\,e^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = 2 \cdot e^{0^+} = 2 \cdot 1 = 2$, calcoliamo separatamente $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{3}{x}} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} \cdot e^{0^+} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\,;$$

in definitiva si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2\,e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

pertanto la funzione $f(x)$ ammette la retta di equazione cartesiana $y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$ come asintoto obliquo destro.

Calcoli del tutto analoghi per $x \to -\infty$ mostrano che la funzione ammette la stessa retta $y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$ come asintoto obliquo sinistro; la retta $y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$ è pertanto asintoto obliquo completo per la funzione assegnata.

Calcoliamo ora la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{x}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - x - 6}{3\,x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$$

dallo studio del segno di $f'(x)$ si scopre che la funzione $f(x)$ cresce sugli intervalli $(-\infty\,, -2)$ e $(3, +\infty)$ mentre decresce sugli intervalli $(-2, 0)$ e $(0, 3)$. La funzione ammette un massimo relativo di ascissa $x = -2$ e un minimo relativo per $x = 3$.

Calcolando $\lim_{x\to0^-} f'(x)$ si hanno informazioni sul modo in cui il grafico "entra" nell'origine:

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2 - x - 6}{3\,x^2}\,e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{3}\,e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{3\,x}\,e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\,;$$

analizzando separatamente i tre addendi si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{3\,x}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\dfrac{1}{3\,x}}{e^{-\frac{1}{x}}} \stackrel{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{3\,x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{3\,\cancel{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x^2}}} = \frac{\frac{1}{3}}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\dfrac{2}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} \stackrel{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{4}{x^{\cancel{3}}}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{4}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} \stackrel{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\dfrac{4}{\cancel{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x^2}}} = \frac{-4}{+\infty} = 0\,;$$

in definitiva abbiamo

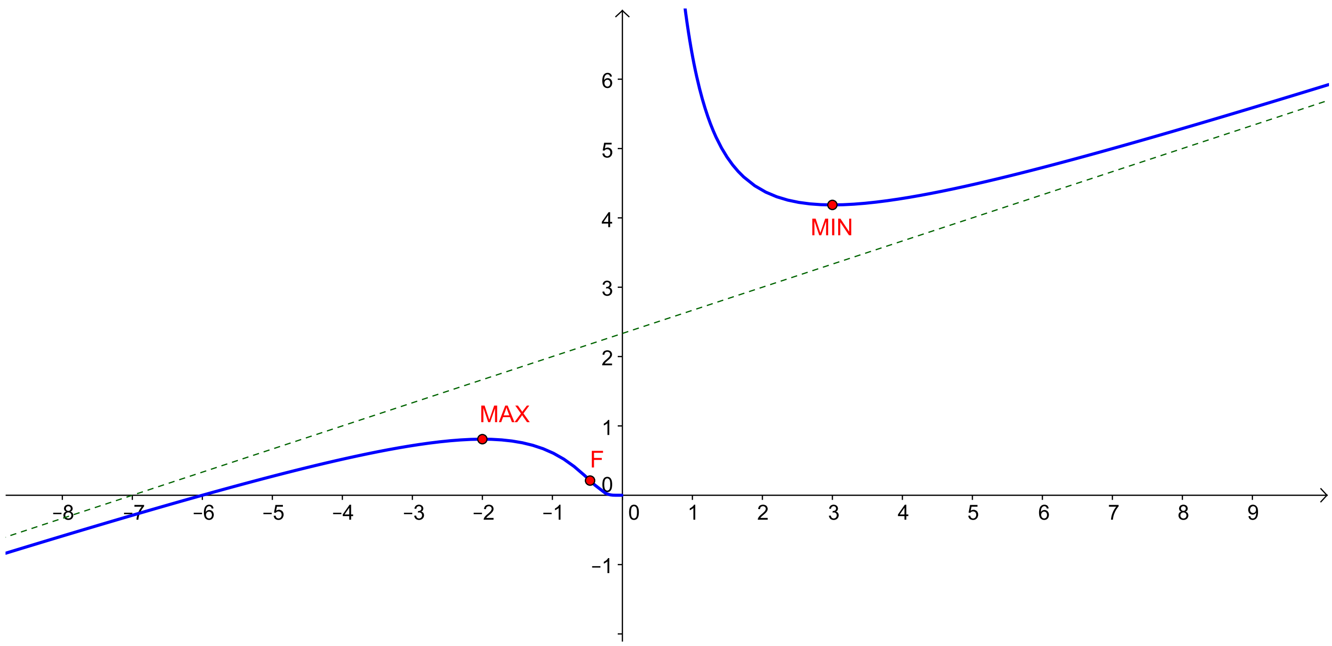
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x-6}{3\,x^2}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3}\, e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{3\,x}\, e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} = 0+0+0 = 0$$

e quindi concludiamo che la funzione "entra" orizzontalmente (ossia con pendenza nulla) nell'origine delle coordinate.

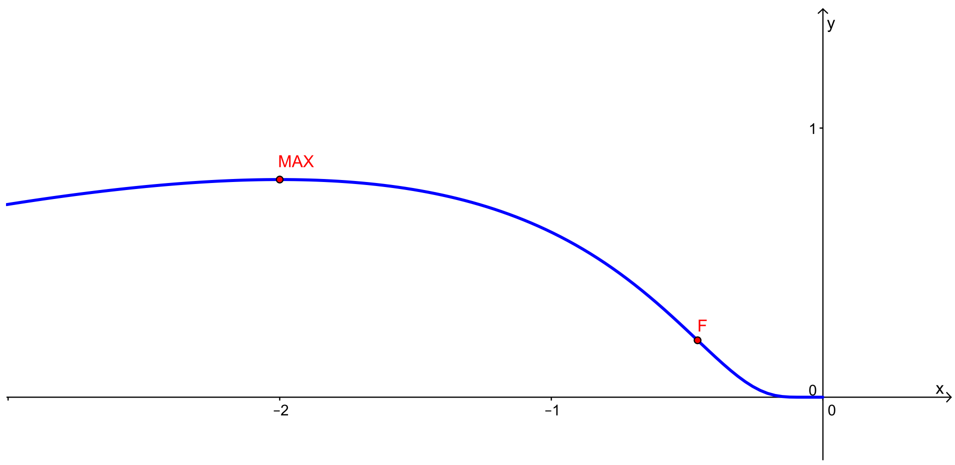
Calcoliamo ora la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{(2\,x-1)\cdot 3\,x^2 - (x^2-x-6)\cdot 6\,x}{9\,x^4}\, e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2-x-6}{3\,x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{13\,x+6}{3\,x^4}\, e^{\frac{1}{x}}\,;$$

dallo studio del segno di $f''(x)$ si scopre che la funzione $f(x)$ ha un flesso ascendente nel suo punto di ascissa $x = -\dfrac{6}{13}$.



La figura seguente mostra uno "zoom" del grafico di $f(x)$ in un intorno sinistro di $x=0$.



Quesito 1. *La capacità di una lattina cilindrica è uguale a 33 cl (= 330 cm^3).*
Quali sono le dimensioni che rendono minima la sua superficie totale (e quindi il costo di produzione)?
Soluzione. Indicato con V il volume della lattina, con h la sua altezza e con x il suo raggio, si ha $h = \dfrac{V}{\pi\, x^2}$.

La superficie totale S_T della lattina è

$$S_T = 2\,\pi\,x^2 + 2\,\pi\,x\,h = 2\,\pi\,x^2 + 2\,\pi\,x \cdot \frac{V}{\pi\,x^2} = 2\,\pi\,x^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{x} \cdot \frac{V}{\cancel{\pi}\,x^{\cancel{2}}} = 2\,\pi\,x^2 + \frac{2\,V}{x}$$

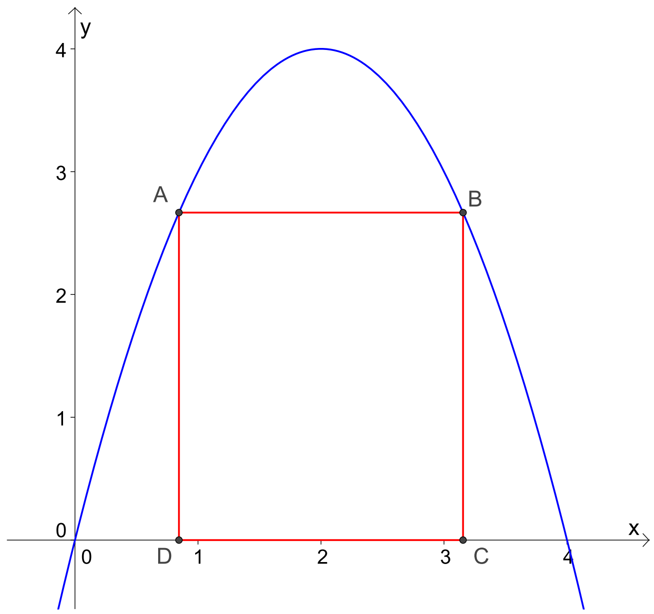
la derivata è uguale a

$$S'_T = 4\,\pi\,x - \frac{2\,V}{x^2} = \frac{4\,\pi\,x^3 - 2\,V}{x^2}$$

dallo studio del segno di S'_T si scopre che la superficie totale minima si ottiene quando il raggio è $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\,\pi}}$ ossia, ricordando che $V = 330$ cm^3, quando

$$x = \sqrt[3]{\frac{330\ \text{cm}^3}{2\,\pi}} \approx 3,74\ \text{cm}\,.$$

Quesito 2. *Si determini il rettangolo di massima area inscritto nella parte di piano limitata dalla parabola* $y = -x^2 + 4\,x$ *e dall'asse* x.
Soluzione. I vertici del generico rettangolo (si veda la figura) sono $A(t\,;\,4\,t - t^2)$, $B(4 - t\,;\,4\,t - t^2)$, $C(4 - t\,;\,0)$, $D(t\,;\,0)$ dove $0 < t < 2$.



L'area S del rettangolo è

$$S(t) = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = (4 - 2\,t) \cdot (4\,t - t^2) = 2\,t^3 - 12\,t^2 + 16\,t\,;$$

derivando si ha

$$S'(x) = 6\,t^2 - 24\,t + 16$$

e dallo studio del suo segno si scopre che l'area è massima (si ricordi che $0 < t < 2$) quando $t = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Quesito 3. *Si calcoli il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (1 - e^{3\,x})}{(\sin x)^3}\,.$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (1 - e^{3\,x})}{(\sin x)^3} = \lim_{x\to 0}\; - x^2 \cdot \frac{e^{3\,x} - 1}{3\,x} \cdot 3\,x \cdot \frac{x^3}{(\sin x)^3} \cdot \frac{1}{x^3} =$$

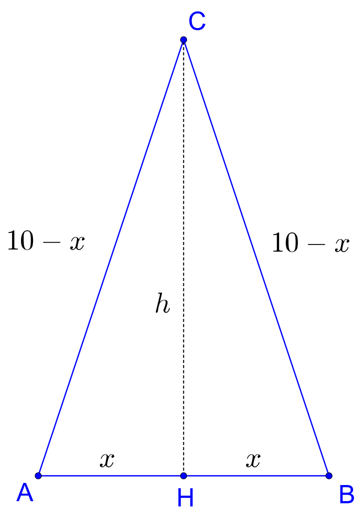
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,x} - 1}{3\,x} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \cdot \frac{-3\,\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,x} - 1}{3\,x} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \cdot (-3) = 1 \cdot 1^3 \cdot (-3) = -3\,.$$

Quesito 4. *Si consideri la funzione* $f(x) = -4\,x^5 - 43\,x^4 + x^3 + 2\,x - 6$*. Si dimostri che ha un flesso di ascissa* $x = 0$*. È un flesso ascendente o discendente?*
Soluzione. Seguiamo il metodo delle derivate successive. La derivata seconda è $f''(x) = -80\,x^3 - 516\,x^2 + 6\,x$ e tra i suoi zeri vi è $x = 0$. La derivata terza è $f'''(x) = -240\,x^2 - 1032\,x + 6$ e risulta $f'''(0) = 6 \neq 0$, quindi si ha un flesso avente ascissa $x = 0$. Il flesso è ascendente in quanto $f'''(0) = 6 > 0$.

Quesito 5. *Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è* 20*, si calcoli la lunghezza della base affinché il cono abbia volume massimo.*

Soluzione. Indicata con x la semibase del triangolo, i lati congruenti del triangolo hanno lunghezza $\dfrac{20-2\,x}{2} = 10-x$ (da cui risulta $0 < x < 5$) ed il cono, avendo raggio di base x ed altezza $h = \sqrt{(10-x)^2 - x^2}$, ha volume

$$V(x) = \frac{1}{3}\,\pi\,x^2 \cdot \sqrt{(10-x)^2 - x^2} = \frac{1}{3}\,\pi\,x^2 \cdot \sqrt{100-20\,x} = \frac{1}{3}\,\pi \cdot \sqrt{100\,x^4 - 20\,x^5}\,.$$



Per massimizzare il volume è sufficiente massimizzare il radicando $g(x) = 100\,x^4 - 20\,x^5$; con lo studio della derivata

$$g'(x) = 400\,x^3 - 100\,x^4 = 100\,x^3(4-x)$$

si scopre che il volume è massimo quando $x = 4$. La lunghezza della base del triangolo, pertanto, è uguale a 8.

Quesito 6. *Si verifichi che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } x \le 0 \\ x^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$*. È derivabile in* $x = 0$ *?*

Soluzione. Per la continuità in $x = 0$ deve risultare $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt[3]{x} + 1 = -\sqrt[3]{0} + 1 = 1\,;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x}$$

poiché

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

risulta

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1\,;$$

dal momento che, per come è definita la funzione $f(x)$, risulta $f(0) = 1$, si ha la continuità in $x = 0$.

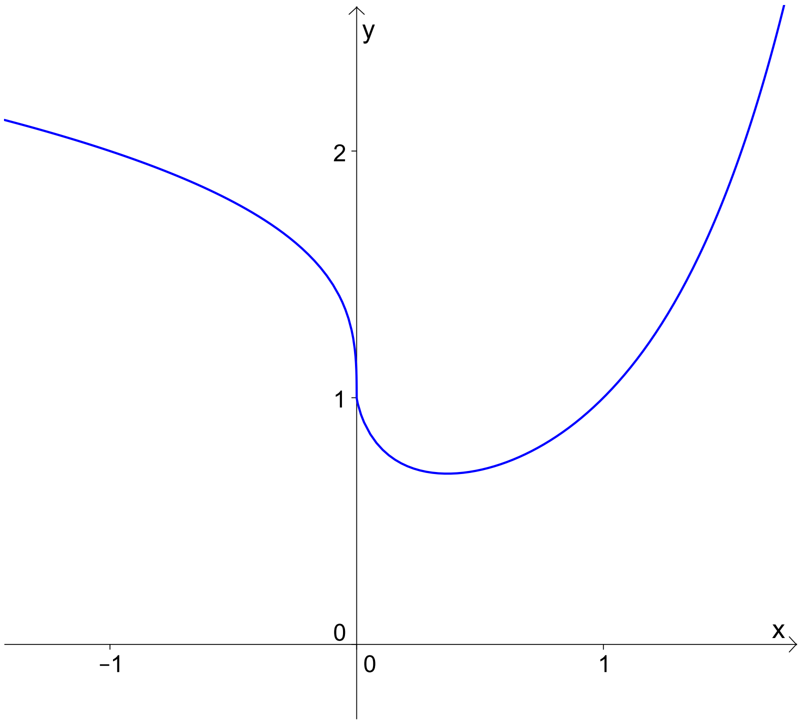
Per quanto riguarda la derivabilità determiniamo il limite della derivata di $f(x)$ per $x \to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}} = -\infty\,;$$

ora determiniamo il limite della derivata di $f(x)$ per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \cdot \left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x^x \cdot (\ln x + 1) = 1\cdot(-\infty+1) = -\infty\,.$$

La funzione $f(x)$ non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$ dove presenta un flesso ascendente a tangente verticale (si veda la figura).

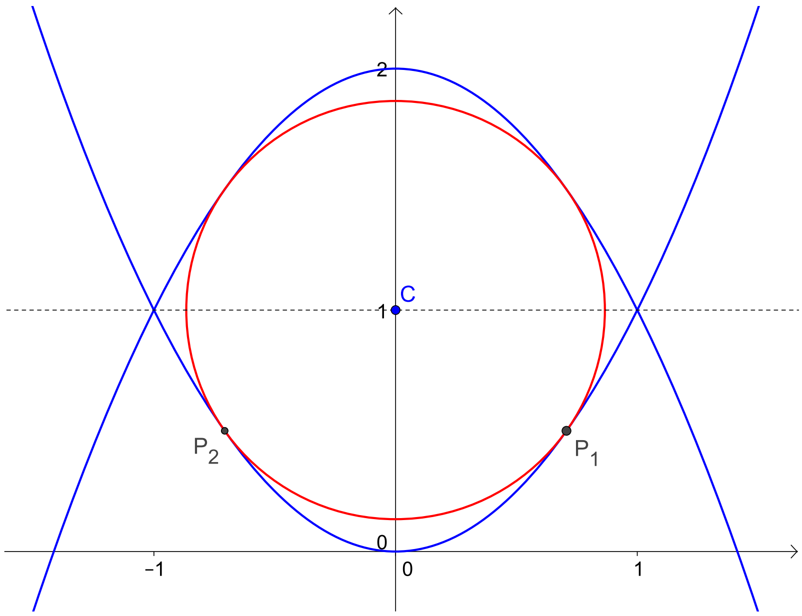


Quesito 7. *Si consideri la parabola $\gamma : y = x^2$ e la sua simmetrica γ' rispetto alla retta $y = 1$. Si determini l'equazione della circonferenza bitangente alle due parabole ed inscritta nella regione finita di piano limitata da esse.*
Soluzione. Le equazioni della simmetria ortogonale rispetto alla retta $y = 1$ sono

$$\begin{cases} x' = x \\ \dfrac{y+y'}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = x' \\ y = 2 - y' \end{cases} ;$$

la parabola γ' ha equazione cartesiana $\gamma' : y' = -(x')^2 + 2$.

La circonferenza richiesta, per evidenti ragioni di simmetria, ha centro nel punto $C(0, 1)$. Considerato il generico punto $P(t, t^2)$ della parabola γ, il raggio CP della circonferenza deve risultare perpendicolare alla retta tangente in P alla parabola γ. Si osserva subito che $t \neq 0$ (si veda la figura seguente).



La retta tangente in P alla parabola γ ha pendenza (coefficiente angolare) uguale a $2\,t$, pertanto il segmento CP deve avere pendenza pari a $-\dfrac{1}{2\,t}$ (ossia uguale all'antireciproco di $2\,t$). Risulta

$$m_{CP} = -\frac{1}{2\,t} \Rightarrow \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = -\frac{1}{2\,t} \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{t - 0} = -\frac{1}{2\,t} \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

i punti di tangenza hanno la stessa ordinata $y = \dfrac{1}{2}$ e quindi il raggio della circonferenza è uguale a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
In definitiva l'equazione cartesiana della circonferenza è

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{3}{4} .$$