Istituto Superiore “XXV aprile” Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Soluzione verifica di Matematica

5^a E Scientifico 18/01/2014

Esercizio 1. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\arcsin(x) + C.$

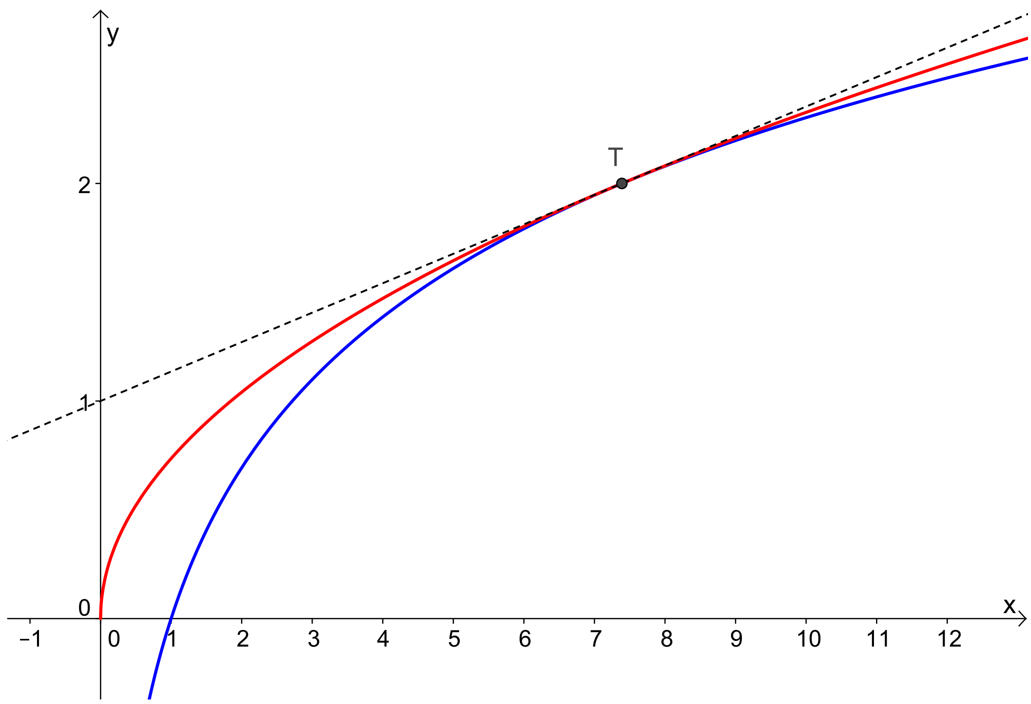
Esercizio 2. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x-6}{x^3+2x^2-6x-2014}\,dx = \ln\left|x^3+2x^2-6x-2014\right| + C.$

Esercizio 3. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

Esercizio 4. $\displaystyle\int x^3 - x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

Esercizio 5. $p(x) = 1 + 2(x+2) + \dfrac{5}{2}(x+2)^2 - (x+2)^3.$

Esercizio 6. Risolvendo il sistema $\begin{cases} \ln x = k\sqrt{x} \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{k}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ si trova $x = e^2$, $k = \dfrac{2}{e}$. Le due curve sono tangenti nel punto $T(e^2, 2)$ dove hanno come tangente comune la retta di equazione $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$.



Esercizio 7. Si ha $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot (e-1) < 0$, inoltre $f'(x) = 1 + e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (e quindi per ogni $x \in (0,1)$). Per il *primo teorema dell'unicità della radice* la funzione ammette un unico zero nell'intervallo considerato.
Se vogliamo trovare un'approssimazione dello zero possiamo utilizzare il metodo di bisezione:

$$[0\,;\,1]\;,\;[0\,;\,0,5]\;,\;[0,25\,;\,0,5]\;,\;[0,375\,;\,0,5]\;,$$

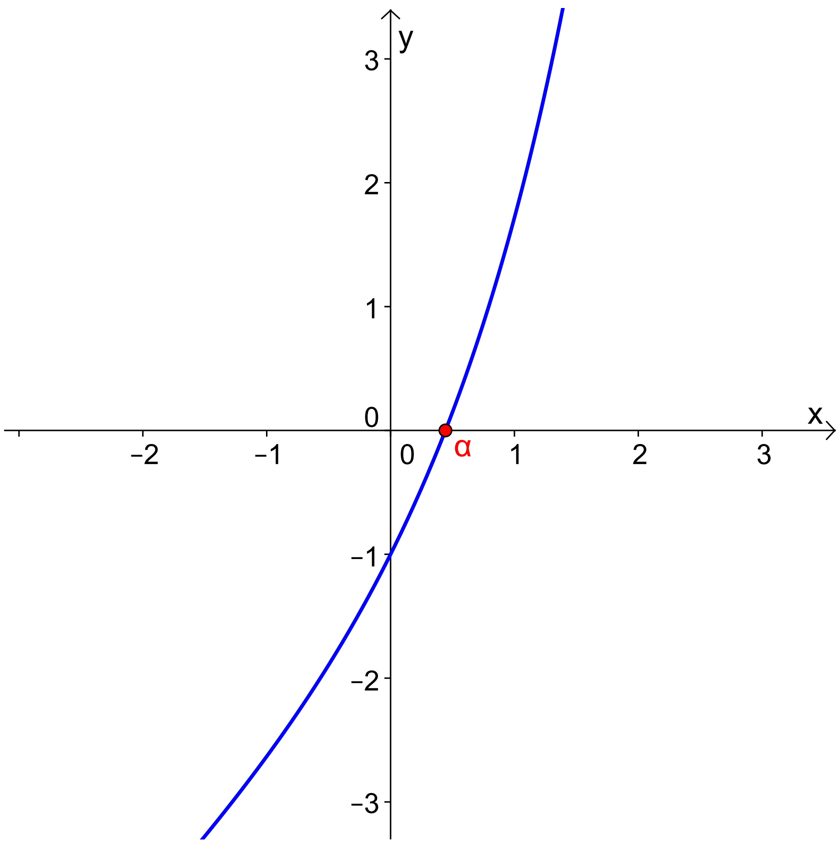
$$[0,4375\,;\,0,5]\;,\;[0,4375\,;\,0,46875]\;,\;[0,4375\,;\,0,453125];$$

la funzione $f(x)$ ha un unico zero α tale che $0,4375 < \alpha < 0,453125$.
Con il metodo di Newton, partendo da $x_0 = 1$, si ottiene la seguente successione:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n + e^{x_n} - 2}{1 + e^{x_n}} \end{cases};$$

la successione è

$$x_1 = 0,537882843 \;\; ; \;\; x_2 = 0,445616749 \;\; ; \;\; x_3 = 0,442856725 \;\; ; \;\; x_4 = 0,442854401 \;\; ; \;\; \ldots$$



Esercizio 8. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^6 - 23} = 0^+ \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^6 - 23} = 0^-$$

quindi la funzione $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{x}{x^6 - 23}$ ammette la retta $y = 2x + 3$ come asintoto obliquo completo ed inoltre il suo grafico sta sopra l'asintoto per $x \to +\infty$ mentre sta sotto per $x \to -\infty$.

Esercizio 9. La derivata della funzione $f(x) = \arctan(2x + \cos x)$

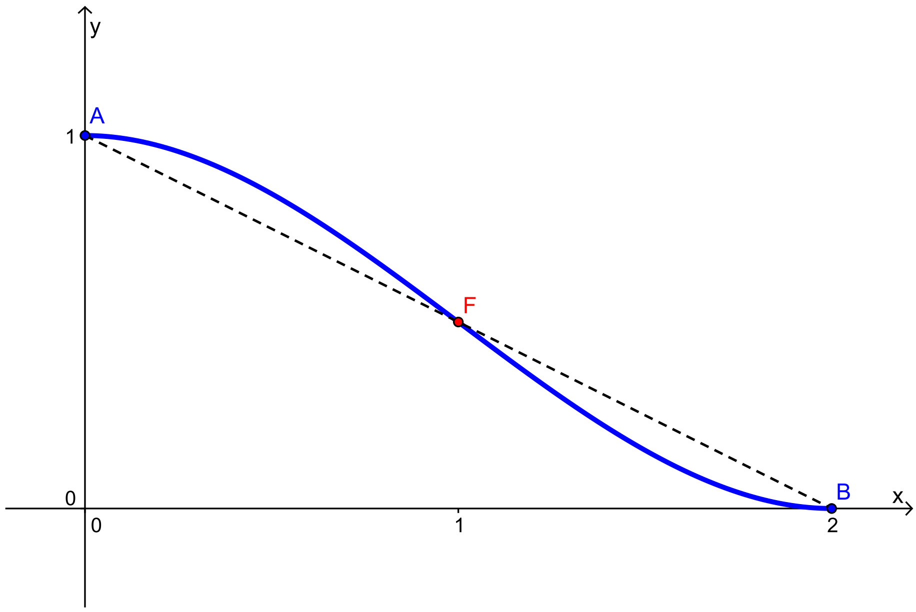
$$f'(x) = \frac{2 - \sin x}{1 + (2x + \cos x)^2}$$

è > 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 10. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

si trovano i valori $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = 0$, $d = 1$; la funzione, pertanto, è $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 1$. Per determinare le coordinate del flesso della curva senza utilizzare i coefficienti ottenuti è sufficiente osservare che **in generale una cubica è simmetrica rispetto al punto di flesso**; dal momento che gli estremi relativi sono i punti di coordinate $A(0,1)$ e $B(2,0)$, il flesso coincide con il punto medio del segmento che li congiunge. Risulta $F\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.



Esercizio 11. Risulta

$$\lim_{x\to 0} (1 - 3x)^{-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1-3x)^{-\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{2}{x}\ln(1-3x)};$$

calcolando ora $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{2}{x}\ln(1-3x)$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x}\ln(1-3x) = \lim_{x\to 0} -\frac{2\ln(1-3x)}{x} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{2\,\frac{-3}{1-3x}}{1} = 6\,.$$

Riprendendo $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{2}{x}\ln(1-3x)}$ si ha

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{2}{x}\ln(1-3x)} = e^6\,.$$