

Soluzione verifica di Matematica

5^a E Scientifico - assenti del 18/01/2014

Esercizio 1. $\int \frac{3}{\sin^2(3x)} dx = -\cot(3x) + C.$

Esercizio 2. $\int \frac{\sin x - 2x}{x^2 + \cos x} dx = -\ln|x^2 + \cos x| + C.$

Esercizio 3. $\int (3x^2 - 1)\sqrt{x^3 - x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - x)^3} + C.$

Esercizio 4. $\int \tan^2(5x) + 1 dx = \frac{\tan(5x)}{5} + C.$

Esercizio 5. Si ha $f(2) \cdot f(7) < 0$ e la derivata seconda è $f''(x) = 2 + \frac{20}{x^2} > 0$ per ogni $x \in (2, 7)$; per il *secondo teorema di unicità della radice*, la funzione $f(x) = x^2 - 20 \ln(x)$ ha un unico zero nell'intervallo $[2, 7]$.

Si osservi che non è possibile applicare il primo teorema di unicità della radice in quanto la derivata prima $f'(x) = 2x - \frac{20}{x} = \frac{2x^2 - 20}{x}$ non ha segno costante sull'intervallo $[2, 7]$.

Se applichiamo il metodo di bisezione si trova la seguente successione di intervalli:

$$[2; 7], [4,5; 7], [5,75; 7], [5,75; 6,375],$$

$$[5,75; 6,0625], [5,90625; 6,0625], [5,90625; 5,984375].$$

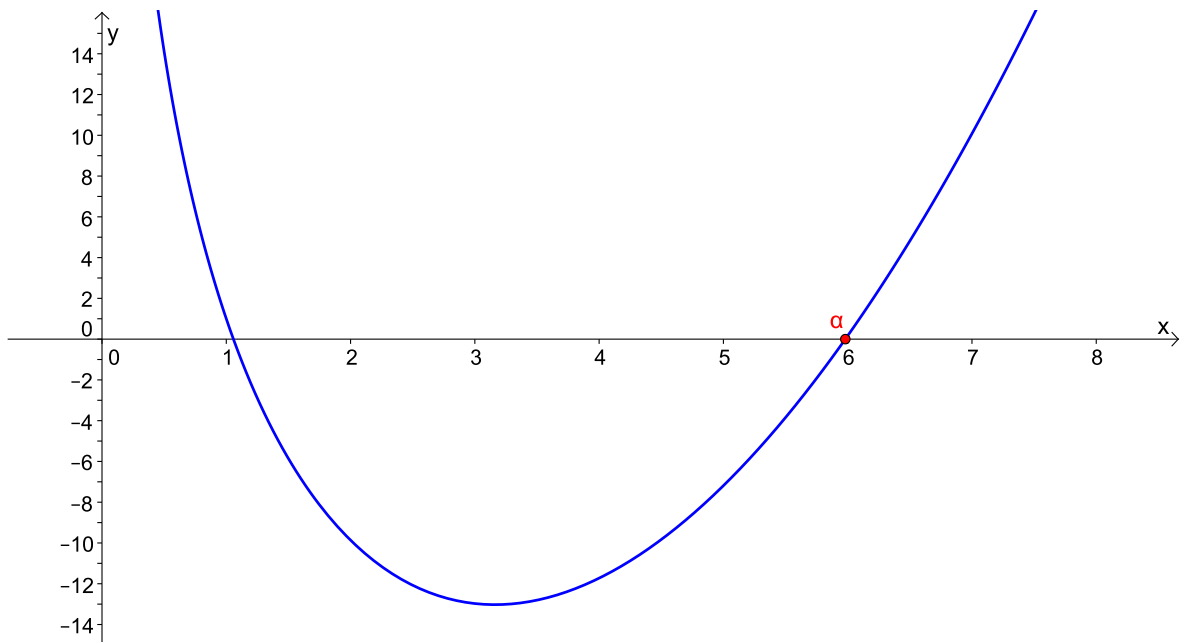
Nell'intervallo $[2; 7]$ la funzione $f(x)$ ha un unico zero α tale che $5,90625 < \alpha < 5,984375$.

Con il metodo di Newton, partendo da $x_0 = 7$, si ha la successione

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 20 \ln(x_n)}{\frac{2x_n^2 - 20}{x_n}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 20 \ln(x_n) - 20)}{2(x_n^2 - 10)} \end{cases}$$

$$x_1 = 6,095223344 ; x_2 = 5,982795656 ; x_3 = 5,980930264 ; x_4 = 5,980929747 .$$



Esercizio 6. Dimostriamo che il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari. Prendiamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ dispari e consideriamo la funzione $p(x) = f(x) \cdot g(x)$; dal momento che risulta

$$p(-x) = \underbrace{f(-x)}_{-f(x)} \cdot \underbrace{g(-x)}_{-g(x)} = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = p(x),$$

la funzione prodotto $p(x)$ è pari.

In modo analogo si dimostra che il prodotto di una funzione pari per una dispari è dispari. Infatti, presa la funzione pari $f(x)$ e la funzione dispari $g(x)$, considerando la funzione $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ si ha

$$h(-x) = \underbrace{f(-x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{g(-x)}_{-g(x)} = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x) \Rightarrow h(x) \text{ è dispari.}$$

Esercizio 7. Per prima cosa calcoliamo $\int \ln(2x) dx$ per parti, considerando come fattore finito $\ln(2x)$:

$$\begin{aligned} \int \ln(2x) dx &= \ln(2x) \cdot x - \int \frac{2}{2x} \cdot x dx = \ln(2x) \cdot x - \int \frac{2}{2x} \cdot x dx = \\ &= \ln(2x) \cdot x - \int 1 dx = \ln(2x) \cdot x - x + C. \end{aligned}$$

Tra le funzioni $F(x) = \ln(2x) \cdot x - x + C$ determiniamo C in modo che il grafico passi per $\left(\frac{e}{2}; 1\right)$:

$$1 = \ln\left(2 \cdot \frac{e}{2}\right) \cdot \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + C \Rightarrow C = 1.$$

La funzione cercata, pertanto, è $F^*(x) = \ln(2x) \cdot x - x + 1$.

Esercizio 8. La derivata della funzione $f(x) - f(2x)$ è $f'(x) - 2f'(2x)$, quindi con le informazioni che abbiamo risulta

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2 \cdot 1) = 5 \\ f'(2) - 2f'(2 \cdot 2) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7. \end{cases}$$

Ricavando $f'(2)$ dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene l'equazione

$$f'(1) - 2(7 + 2f'(4)) = 5 \quad \text{da cui} \quad f'(1) - 4f'(4) = 19.$$

La derivata della funzione $f(x) - f(4x)$ è $f'(x) - 4f'(4x)$; nel punto $x = 1$ la derivata è $f'(1) - 4f'(4) = 19$.

Esercizio 9. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 1 \\ d = 0 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}$$

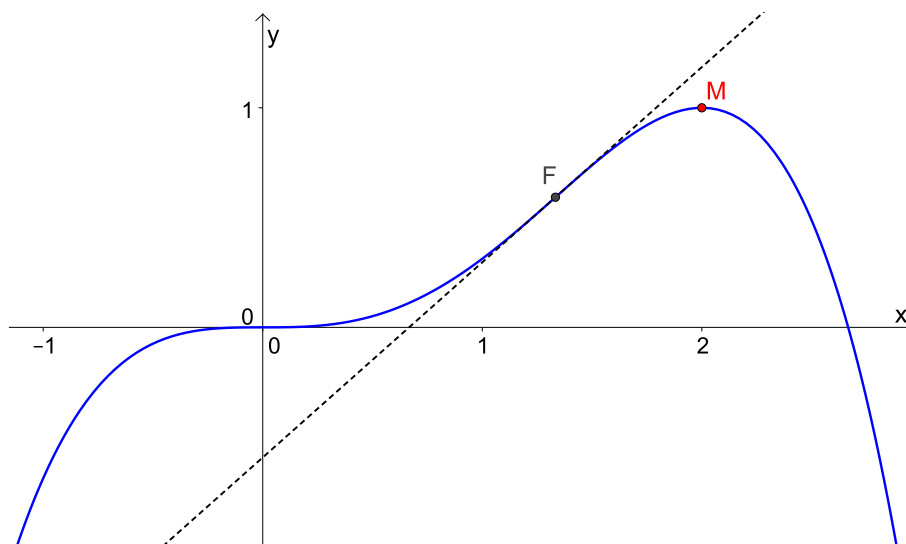
si trova $a = -\frac{3}{16}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$.

La funzione richiesta, pertanto, è $f(x) = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3$.

Calcolando la derivata seconda si determina il flesso a tangente obliqua; infatti la derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 3x = x\left(-\frac{9}{4}x + 3\right)$$

si annulla per $x = 0$ (e questo lo sapevamo già, dato che nell'origine la curva ha un flesso a tangente orizzontale) e per $x = \frac{4}{3}$. Il punto di flesso a tangente obliqua ha ascissa $x = \frac{4}{3}$ e la retta tangente inflessionale ha equazione cartesiana $y = \frac{8}{9}x - \frac{16}{27}$.



Esercizio 10. Per prima cosa analizziamo la continuità della funzione $f(x)$; poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} -4x + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

la funzione è continua in $x_0 = 0$.

La derivata della funzione in un punto $x \neq 0$ è

$$f'(x) = -4 + 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

e, se facciamo il limite per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -4 + 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -4 + 0 + 0 = -4;$$

questo risultato, assieme alla continuità in $x_0 = 0$, garantisce la derivabilità della funzione $f(x)$ in $x_0 = 0$ ed inoltre ci assicura che $f'(0) = -4$.

Si ricordi che per avere la derivabilità in un punto x_0 è necessario che la funzione sia continua in tale punto; se omettiamo la verifica della continuità possiamo incorrere in grossi errori. Ad esempio,

analizzando la derivabilità in $x_0 = 2$ della funzione $g(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{3x}{2-x}\right) & \text{se } x \neq 2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 2 \end{cases}$, essendo

$\lim_{x \rightarrow 2} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{5x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{6}$, qualcuno potrebbe affermare che $g(x)$ è derivabile in $x_0 = 2$ e che risulta $g'(2) = \frac{1}{6}$. Ma il ragionamento non è corretto dal momento che la funzione $g(x)$ non è continua in $x_0 = 2$, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x).$$

Poiché $g(x)$ non è continua in $x_0 = 2$, non è ivi derivabile.

Esercizio 11.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{2x}}{(1 - e^{-x})^2} \stackrel{(H.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2e^{2x}}{2(1 - e^{-x}) \cdot e^{-x}} = \frac{-2 \cdot 1}{2 \cdot 0^- \cdot 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty.$$

