Istituto Superiore "XXV aprile" Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Soluzione verifica di Matematica

5^aE Liceo Scientifico - 30/11/2013

Esercizio 1. *Si determini l'equazione della retta tangente alla curva*

$$y = \sqrt[3]{12\,x+8}$$

nel suo punto di ascissa $x = 0$.
Soluzione. Poiché $y = (12\,x+8)^{\frac{1}{3}}$, la derivata è

$$y' = \frac{1}{3}\,(12\,x+8)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 12 = \frac{12}{3\,\sqrt[3]{(12\,x+8)^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{(12\,x+8)^2}}$$

e quindi risulta

$$y'(0) = \frac{4}{\sqrt[3]{(12\cdot 0+8)^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

da cui l'equazione della retta tangente richiesta:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad\Rightarrow\quad y - \sqrt[3]{12\cdot 0+8} = 1\,(x-0) \quad\Rightarrow\quad y-2 = x \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{y = x+2}$$

Esercizio 2. *Si determinino gli intervalli di monotonia della funzione*

$$f(x) = (x^2-3\,x+1)\,e^{x-2}\,.$$

Soluzione. Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$ e la sua derivata è

$$f'(x) = (2\,x-3)\,e^{x-2} + (x^2-3\,x+1)\,e^{x-2} =$$
$$= e^{x-2}(2\,x-3+x^2-3\,x+1) = e^{x-2}(x^2-x-2)\,;$$

il segno della derivata è determinato solo dalla parentesi in quanto $e^{x-2}>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
La funzione cresce per $x<-1 \vee x>2$ e decresce per $-1<x<2$; $x=-1$ è punto di massimo e $x=2$ è punto di minimo.

Esercizio 3. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x & se\ x \le 3 \\ \ln(x-2)+x & se\ x>3\,. \end{cases}$$

Si determinino i coefficienti a e b in modo che $f(x)$ *risulti derivabile in* $x=3$.
Soluzione. Deve risultare

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} a\,x^2+b\,x = 9\,a+3\,b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x-2)+x = 9\,a+3\,b \\ \lim\limits_{x\to 3^-} 2\,ax+b = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-2}+1 \end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 9\,a+3\,b = 9\,a+3\,b \\ 3 = 9\,a + 3\,b \\ 6\,a + b = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4. *Si determinino gli eventuali valori di λ in modo che risulti*

$$\left| \pi \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\cos x - 1} - 2 \lim_{x\to 0^+} \arccos\left(\frac{x\,e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^x}\right) + \lambda \right| = 5\,\pi\,.$$

Soluzione. Per il primo limite basta applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\cos x - 1} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x}}{-\sin x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{-2\,x}{(1+x)(1-x)}}{-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\,x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x\to 0^-} 2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)}\,;$$

ricordando ora il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, risulta $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} 2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(1+0)\cdot(1-0)} = 2\,.$$

Per il secondo limite, invece, ricordando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-e^x} = -1$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x\,e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^x}\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{1-e^x}\right) = e^{-\frac{1}{0^+}} \cdot (-1) = -e^{-\infty} = -0 = 0\,;$$

in definitiva per il secondo limite risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \arccos\left(\frac{x\,e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^x}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Sostituendo i risultati ottenuti nell'espressione iniziale, risulta:

$$\left| \pi \cdot 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \lambda \right| = 5\,\pi \quad \Rightarrow \quad |\,\pi + \lambda\,| = 5\,\pi \quad \Rightarrow \quad \pi + \lambda = \begin{array}{l} \nearrow \; 5\,\pi \\ \searrow \; -5\,\pi \end{array}$$

i due valori richiesti di λ, pertanto, sono i seguenti:

$$\boxed{\lambda_1 = 4\,\pi \quad , \quad \lambda_2 = -6\,\pi}$$