Istituto Superiore “XXV aprile” Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Soluzione verifica di Matematica

5^aE Liceo Scientifico - assenti del 30/11/2013

Esercizio 1. *Si determini il valore di k in modo che le curve*

$$y = 2\,x^3 - x^2 + 2 \qquad e \qquad y = 3 + k \ln x$$

risultino ortogonali nel loro punto di ascissa 1.
Soluzione. Il prodotto dei coefficienti angolari delle rette tangenti nel loro punto di ascissa $x = 1$ deve essere uguale a -1; le derivate sono

$$y' = 6\,x^2 - 2\,x \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{k}{x}$$

quindi risulta

$$(6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1) \cdot \left(\frac{k}{1}\right) = -1 \;\Rightarrow\; 4\,k = -1 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{k = -\frac{1}{4}}$$

Esercizio 2. *Si determinino gli intervalli di monotonia della funzione*

$$f(x) = x^5 \ln\left(x^3\right) .$$

Soluzione. Il dominio di $f(x)$ è l'intervallo $(0, +\infty)$ e la derivata della funzione è

$$f'(x) = 5\,x^4 \cdot \ln\left(x^3\right) + x^5 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3\,x^2 = x^4\,(3 + 5\,\ln(x^3))$$

la derivata è positiva se e solo se

$$3 + 5\,\ln(x^3) > 0 \;\Rightarrow\; 5 \cdot 3 \cdot \ln x > -3 \;\Rightarrow\; \ln x > -\frac{1}{5} \;\Rightarrow\; x > e^{-\frac{1}{5}}$$

e quindi, essendo $e^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$, possiamo concludere che la funzione decresce per $0 < x < \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ e cresce per $x > \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

Esercizio 3. *Si determini il dominio e la derivata della funzione*

$$f(x) = \arcsin(1 - x^2)\,.$$

Si dica se $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.
Soluzione. Il dominio di $f(x)$ è

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\,.$$

La funzione è continua in $x = 0$ e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} \cdot (-2\,x) = -\frac{2\,x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = -\frac{2\,x}{\sqrt{2\,x^2 - x^4}} =$$

$$= -\frac{2\,x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = -\frac{2\,x}{|x|\,\sqrt{2-x^2}}\,.$$

Per la derivata destra in $x=0$ si ha (osserviamo che $|x| = x$ per $x>0$)

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\,x}{|x|\,\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\,x}{x\,\sqrt{2-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2-0^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

quindi $f'_+(0) = -\sqrt{2}$.

Per la derivata sinistra in $x=0$, invece, risulta (osserviamo che $|x| = -x$ per $x<0$)

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{2\,x}{|x|\,\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{2\,x}{(-x)\,\sqrt{2-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2-0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

e quindi $f'_-(0) = \sqrt{2}$. I due risultati ($f'_+(0)$ e $f'_-(0)$) sono finiti e distinti, quindi la funzione non è derivabile in $x=0$ dove presenta un punto angoloso.

Esercizio 4. *Si determini* λ *in modo che risulti*

$$\left[\lambda + \frac{2}{3}\,\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2\,x}\right)^{3\,x}\right)\right]^2 = 9\,.$$

Soluzione. Per prima cosa riscriviamo la funzione $\left(1-\frac{1}{2\,x}\right)^{3\,x}$ nel modo seguente:

$$\left(1-\frac{1}{2\,x}\right)^{3\,x} = e^{\ln\left(1-\frac{1}{2\,x}\right)^{3\,x}} = e^{3\,x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{2\,x}\right)}\,;$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} 3\,x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{2\,x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2\,x-1}{2\,x}\right)}{\frac{1}{3\,x}} \overset{(H.)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\,x}{2\,x-1}\cdot\frac{1}{2\,x^2}}{-\frac{1}{3\,x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2}\,x}{2\,x-1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\cancel{x^2}}\cdot(-3\,\cancel{x^2}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\,x}{1-2\,x} = -\frac{3}{2}$$

si ha che il limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} e^{3\,x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{2\,x}\right)} = e^{-\frac{3}{2}}\,.$$

Infine determiniamo i valori di λ:

$$\left[\lambda + \frac{2}{3}\cdot\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right]^2 = 9 \;\Rightarrow\; \left[\lambda + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 = 9 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; [\lambda - 1]^2 = 9 \;\Rightarrow\; \lambda - 1 = \begin{matrix} \nearrow & 3 \\ \searrow & -3 \end{matrix}$$

i valori richiesti di λ, pertanto, sono i seguenti:

$$\boxed{\lambda_1 = 4\;,\;\;\lambda_2 = -2}$$