Soluzione esercizi sulle funzioni - 5^aE Liceo Scientifico - 04/11/'13

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

e si verifichi che non è continua in $x = 0$. Che tipo di discontinuità presenta in tale punto? È continua a sinistra? **(Maturità 2011 PNI suppletiva - modif.)**
Soluzione. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

quindi in $x = 0$ si ha una *discontinuità di prima specie* con salto uguale a

$$s = \left| \lim_{x\to 0^-} f(x) - \lim_{x\to 0^+} f(x) \right| = |1 - 0| = 1\,.$$

La funzione è continua a sinistra in quanto $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}$. Determinare la derivata di f. Determinare l'equazione della retta t tangente al suo grafico nel punto di intersezione con l'asse delle ordinate e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani. Calcolare $\lim_{x\to -3^+} f'(x)$. Determinare infine il punto di massimo assoluto della funzione. **(Maturità 2011 PNI suppletiva - modif.)**
Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\}$. La derivata è

$$f'(x) = -1 \cdot \sqrt{x+3} + (3-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-2(x+3)+3-x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-3x-3}{2\sqrt{x+3}} = -\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}}\,.$$

La funzione f interseca l'asse y nel punto $P(0, 3\sqrt{3})$; la retta t tangente al grafico della funzione in P ha coefficiente angolare $f'(0) = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ed ha pertanto equazione

$$t : y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3}\,.$$

La retta t interseca l'asse x nel punto $A(6, 0)$ e quindi il triangolo AOP ha area uguale a $\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot (3\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$.

Per quanto riguarda $\lim_{x\to -3^+} f'(x)$ si ha:

$$\lim_{x\to -3^+} -\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}} = -\frac{-6}{0^+} = +\infty\,.$$

Studiando il segno di f' si scopre che $f'(x) > 0$ a sinistra di $x = -1$ e $f'(x) < 0$ alla sua destra, quindi $x = -1$ è punto di massimo. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che $x = -1$ è il punto di massimo assoluto.

Esercizio 3. Si determinino a e b in modo che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi dai punti $(1, 4)$ e $(3, 8)$. **(Maturità 2010 suppletiva)**
Soluzione. Imponendo il passaggio da entrambi i punti si ha

$$\begin{cases} 4 = a^{1+b} \\ 8 = a^{3+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = a^{1+b} \\ 8 = a^2 \cdot a^{1+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = a^{1+b} \\ 8 = a^2 \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = a^{1+b} \\ 2 = a^2 \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ha $a = \sqrt{2}$ (si osservi che a non può essere negativa e quindi la soluzione $-\sqrt{2}$ va scartata); sostituendo nella prima equazione abbiamo

$$4 = \left(\sqrt{2}\right)^{1+b} \Rightarrow 2^2 = 2^{\frac{1+b}{2}} \Rightarrow 2 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow b = 3\,.$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2\,x}$. Determinare i punti di massimo e minimo relativi. Si calcolino a, b, c in modo che risulti $\dfrac{x^2+1}{x^2+2\,x} = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+2}$. **(Maturità 2010 PNI suppletiva - modif.)**
Soluzione. La derivata della funzione f assegnata è

$$f'(x) = \frac{2\,x(x^2+2\,x)-(x^2+1)(2\,x+2)}{(x^2+2\,x)^2} = \frac{2\,x^2-2\,x-2}{(x^2+2\,x)^2}\,.$$

Dallo studio del segno di f' si scopre che $f'(x)>0$ a sinistra di $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $f'(x)<0$ alla sua destra, pertanto tale punto è di massimo. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo relativo.

Continuando lo studio del segno della derivata f' si scopre che $f'(x)<0$ alla sinistra di $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $f'(x)>0$ alla sua destra: $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo relativo.

Per il calcolo dei coefficienti si ha:

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2} = \frac{a\,x\,(x+2)+b\,(x+2)+c\,x}{x(x+2)} = \frac{a\,x^2+(2\,a+b+c)\,x+2\,b}{x^2+2\,x}\,;$$

uguagliando l'ultima espressione con quella della funzione assegnata, abbiamo

$$\frac{a\,x^2+(2\,a+b+c)\,x+2\,b}{x^2+2\,x} = \frac{x^2+1}{x^2+2\,x}\,;$$

deve risultare

$$\begin{cases} a=1 \\ 2\,a+b+c=0 \\ 2\,b=1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} a=1 \\[1ex] b=\dfrac{1}{2} \\[1ex] c=-\dfrac{5}{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 5. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = a\,x^2+b\,x+c$ risulta $f'(x_1)+f'(x_2)=0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata. **(Maturità 2010 PNI suppletiva)**
Soluzione. Primo metodo. La derivata della funzione è $f'(x) = 2\,a\,x+b$; gli zeri della funzione sono

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} = -\frac{b}{2\,a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} = -\frac{b}{2\,a}\pm d$$

dove con d abbiamo indicato la quantità $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$. Calcoliamo a questo punto la somma $f'(x_1)+f'(x_2)$:

$$f'(x_1)+f'(x_2) = 2\,a\cdot\left(-\frac{b}{2\,a}+d\right)+b+2\,a\cdot\left(-\frac{b}{2\,a}-d\right)+b =$$
$$= -b+2\,a\,d+b-b-2\,a\,d+b = 0\,.$$

Secondo metodo. La derivata della funzione è $f'(x) = 2\,a\,x+b$; ricordando che gli zeri x_1 e x_2 della funzione $f(x)$ hanno somma $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$, si ha

$$f'(x_1)+f'(x_2) = 2\,a\,x_1+b+2\,a\,x_2+b = 2\,a(x_1+x_2)+2\,b =$$
$$= 2\,[a(x_1+x_2)+b] = 2\left[a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right] = 2\,[-b+b] = 0\,.$$

Il risultato ha una semplice interpretazione geometrica: le rette tangenti negli zeri di f sono simmetriche rispetto alla retta $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ e pertanto i loro coefficienti angolari sono opposti.

Esercizio 6. Si determini il punto P della parabola $4\,y = x^2$ più vicino al punto di coordinate $(6, -3)$.
(Maturità 2010 PNI suppletiva)
Soluzione. Primo metodo. Il punto generico della parabola ha coordinate $P\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$. La distanza d del punto $(6, -3)$ da P è

$$d = \sqrt{(t-6)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + 3\right)^2} = \sqrt{\frac{t^4 + 40\,t^2 - 192\,t + 720}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{t^4 + 40\,t^2 - 192\,t + 720}\,.$$

Si tratta ora di rendere minimo il radicando $r(x)$ dell'ultima espressione, che ha derivata

$$r'(t) = 4\,t^3 + 80\,t - 192 = 4(t^3 + 20\,t - 48)\,.$$

Fattorizzando il polinomio in parentesi si ha

$$r'(t) = 4(t-2)(t^2 + 2\,t + 24)$$

ed osservando che il polinomio $t^2 + 2\,t + 24$ è sempre positivo ($\Delta < 0$ ed il coefficiente di 2° grado è > 0), possiamo affermare che $r'(t)$ si annulla solo in $t = 2$. Studiando il segno di $r'(t)$ si scopre che $r'(t) < 0$ a sinistra di $t = 2$ e $r'(t) > 0$ alla sua destra: $t = 2$ è punto di minimo di $r(t)$. Dallo studio dell'andamento di $r(t)$ si scopre che $t = 2$ è il punto di minimo assoluto. In definitiva, il punto P della parabola più vicino al punto $(6, -3)$ ha ascissa $t = 2$ ed ha pertanto coordinate $P(2, 1)$.

Secondo metodo. Si tratta di determinare l'equazione della circonferenza di centro $(6, -3)$ e tangente alla parabola assegnata. Poiché la parabola e la circonferenza devono essere tangenti nel punto $P\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$, la tangente alla parabola in P deve essere perpendicolare alla retta passante per P e $(6, -3)$. Il prodotto della derivata della funzione $y = \dfrac{x^2}{4}$ con il coefficiente angolare della retta passante per P e $(6, -3)$ deve essere uguale a -1:

$$\frac{t}{2} \cdot \frac{\frac{t^2}{4} - (-3)}{t-6} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^3 + 20\,t - 48}{t-6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(t-2)(t^2 + 2\,t + 24)}{t-6} = 0\,;$$

l'unica soluzione reale dell'equazione è $t = 2$, quindi il punto della parabola più vicino a $(6, -3)$ ha ascissa 2 ed ha pertanto coordinate $(2, 1)$.

Esercizio 7. Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x) = \tan x + \cot x\,$.
(Maturità 2011 PNI suppletiva - modif.)
Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\,\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$. La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin x\,\cos x)^2} = \frac{-\cos(2\,x)}{\left(\frac{\sin(2\,x)}{2}\right)^2} = -4\,\frac{\cos(2\,x)}{\sin^2(2\,x)}\,.$$

Alternativamente, essendo

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\dfrac{\sin(2\,x)}{2}} = \frac{2}{\sin(2\,x)}\,,$$

la derivata è $f'(x) = \dfrac{-4\cos(2\,x)}{\sin^2(2\,x)}\,.$

Dallo studio del segno di $f'(x)$ si scopre che, considerando i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$, la funzione $f(x)$ decresce alla loro sinistra e cresce alla loro destra, quindi si tratta di punti di minimo. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che i punti $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ sono di minimo relativo.

Sempre dalla studio del segno di $f'(x)$ si scopre che, considerando i punti di ascissa $x = \frac{3}{4}\,\pi + k\,\pi$, la funzione $f(x)$ cresce alla loro sinistra e decresce alla loro destra, quindi si tratta di punti di massimo. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che i punti $x = \frac{3}{4}\,\pi + k\,\pi$ sono di massimo relativo.

Esercizio 8. Dimostrare che la funzione $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante sull'intervallo $[-1, 1]$. Trovare C in modo che risulti $\arcsin x + \arccos x = C$ per ogni $x \in [-1, 1]$.
Soluzione. La funzione $f(x)$ è continua sull'intervallo $[-1, 1]$ ed è derivabile nei punti interni con derivata

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall\, x \in (-1, 1)\,.$$

Una delle conseguenze del teorema di Lagrange ci assicura che la funzione è costante su *tutto* l'intervallo $[-1, 1]$ ed il valore della costante C si trova semplicemente ponendo, ad esempio, $x = 0$ in $f(x)$:

$$C = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Esercizio 9. Dimostrare che la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ è costante a tratti e si dia un'espressione più semplice per f.
Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ mentre la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall\, x \neq 0\,.$$

Sull'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione è costante ed il valore di questa costante si trova semplicemente sostituendo un valore alla x, ad esempio $x = -1$:

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Sull'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è costante ed il valore di questa costante si trova semplicemente sostituendo un valore alla x, ad esempio $x = 1$:

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.$$

In definitiva possiamo scrivere:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 10. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) = \sin x \cos^3 x$ nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
(Maturità 1987)
Soluzione. La derivata della funzione è

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos^3 x + \sin x \cdot (3\,\cos^2 x \cdot (-\sin x)) =$$
$$= \cos^4 x - 3\,\cos^2 x\,\sin^2 x = \cos^2 x\,(\cos^2 x - 3\,\sin^2 x) =$$
$$= \cos^2 x\,(\cos^2 x - 3\,(1-\cos^2 x)) = \cos^2 x\,(4\cos^2 x - 3) =$$
$$= \cos^2 x\,(4\cos^2 x - 2 - 1) = \cos^2 x\,\big(2\,(2\,\cos^2 x - 1) - 1\big) =$$
$$= \cos^2 x\,(2\,\cos(2\,x) - 1)\ ;$$

dallo studio del segno della derivata, **limitandoci come richiesto all'intervallo** $[0, \frac{\pi}{2}]$, si scopre che $f'(x) > 0$ a destra di $x = 0$ (non dobbiamo guardare a sinistra di $x = 0$ in quanto dobbiamo restare nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$) e $f'(x) < 0$ a sinistra di $x = \frac{\pi}{2}$ (non dobbiamo guardare a destra di $x = \frac{\pi}{2}$ in quanto, come già detto, dobbiamo restare nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$): i punti di ascisse $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ sono punti di minimo.
Continuando lo studio del segno della derivata $f'(x)$ si scopre che $f'(x) > 0$ a sinistra di $x = \frac{\pi}{6}$ e $f'(x) < 0$ alla sua destra (si osservi che $x = \frac{\pi}{6}$ è *interno* all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$): $x = \frac{\pi}{6}$ è punto di massimo.

Dall'andamento della funzione non è difficile capire che $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ sono i punti di minimo assoluto e che $x = \frac{\pi}{6}$ è il punto di massimo assoluto.

Esercizio 11. Determinare a e b in modo che il grafico della funzione $f(x) = a\,x\,e^{b\,x^2}$ abbia un massimo assoluto nel punto $(1,2)$.
Soluzione. La derivata della funzione assegnata è

$$f'(x) = a\,e^{b\,x^2} + a\,xe^{b\,x^2}\cdot(2\,b\,x) = a\,(2\,b\,x^2+1)\,e^{b\,x^2}$$

ed imponendo che la derivata si annulli in $x=1$ si ha (si osservi che $e^b \neq 0$)

$$a\,(2\,b\cdot 1^2+1)\,e^{b\cdot 1^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad a\,(2\,b+1) = 0\,.$$

L'altra condizione (ci sono due parametri da determinare) si ricava dal passaggio del grafico della funzione dal punto di coordinate $(1,2)$:

$$a\cdot 1\cdot e^{b\cdot 1^2} = 2 \quad\Rightarrow\quad a\,e^b = 2\,.$$

In definitiva si ha

$$\begin{cases} a\,(2\,b+1) = 0 \\ a\,e^b = 2 \end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad \begin{cases} a = 2\,\sqrt{e} \\ b = -\dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Dallo studio del segno della derivata si scopre che effettivamente la funzione ha un massimo in $x=1$. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che tale punto è di massimo assoluto.

Esercizio 12. Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x) = x - \arctan x - 2\,\ln(x^2+1)\,.$$

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$; la derivata è

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} - 2\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2\,x = \frac{x(x-4)}{1+x^2}\,;$$

dallo studio del segno di f' si scopre che $x=0$ è un punto di massimo ($f'(x)>0$ a sinistra e $f'(x)<0$ a destra) e che $x=4$ è un punto di minimo ($f'(x)<0$ a sinistra e $f'(x)>0$ a destra).

Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che $x=0$ è punto di massimo relativo e che $x=4$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 13. Assegnata la funzione $f(x) = x^x$, trovare il suo punto di minimo assoluto.
Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \{x\in\mathbb{R} : x>0\}$. Riscriviamo la funzione nella forma

$$f(x) = e^{\ln(x^x)} = e^{x\,\ln x}$$

e calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \underbrace{e^{x\,\ln x}}_{x^x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\,(\ln x+1)\,.$$

Dallo studio del segno di $f'(x)$ si scopre che $x = \dfrac{1}{e}$ è un punto di minimo ($f'(x)<0$ a sinistra e $f'(x)>0$ a destra). Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che tale punto è di minimo assoluto.

Esercizio 14. Dimostrare che la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è crescente su $\mathbb{R}$. Determinare i suoi asintoti. **(Maturità 2011 suppletiva - modif.)**
Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}\,\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}\,x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\dfrac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$\frac{\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,.$$

La derivata $f'(x)$ è positiva per ogni x reale, quindi la funzione è crescente su $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora il limite della funzione $f(x)$ per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}=-1\,;$$

in alternativa:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1\,;$$

possiamo quindi concludere che la funzione $f(x)$ ha un *asintoto orizzontale sinistro* di equazione cartesiana $y=-1$.

Vediamo ora il limite di $f(x)$ per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}=1\,;$$

in alternativa:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1\,;$$

possiamo quindi concludere che la funzione $f(x)$ ha un *asintoto orizzontale destro* di equazione cartesiana $y=1$.

Esercizio 15. Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x)=(a\,x+b)\,e^{-\frac{x}{3}}+3$ dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo assoluto nel punto d'ascissa 4 e che $f(0)=2$. **(Maturità 2011)**

Soluzione. La derivata della funzione è

$$f'(x)=a\,e^{-\frac{x}{3}}+(a\,x+b)\,e^{-\frac{x}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\,(a\,x-3\,a+b)\,e^{-\frac{x}{3}}\,;$$

deve risultare (si osservi che $e^{-\frac{x}{3}}\neq 0$ per ogni x reale):

$$\begin{cases}f(0)=2\\ f'(4)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a\cdot 0+b)\,e^{-\frac{0}{3}}+3=2\\ a\cdot 4-3\,a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+3=2\\ a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\,.\end{cases}$$

Dallo studio del segno della derivata si scopre che effettivamente la funzione ha un punto di massimo in $x=4$. Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che tale punto è di massimo assoluto.

Esercizio 16. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
(Maturità 2010 suppletiva - modif.)
Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ e la sua derivata è

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2\,x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2\,x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

dallo studio del segno della derivata si scopre che $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo ($f'(x) < 0$ a sinistra e $f'(x) > 0$ a destra) e che $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo ($f'(x) > 0$ a sinistra e $f'(x) < 0$ a destra). Dallo studio dell'andamento del grafico si scopre che $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è il punto di minimo assoluto e che $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è il punto di massimo assoluto.
