Istituto Superiore "XXV aprile" Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Soluzione verifica di Matematica

5^aE Liceo Scientifico - 14/11/2013

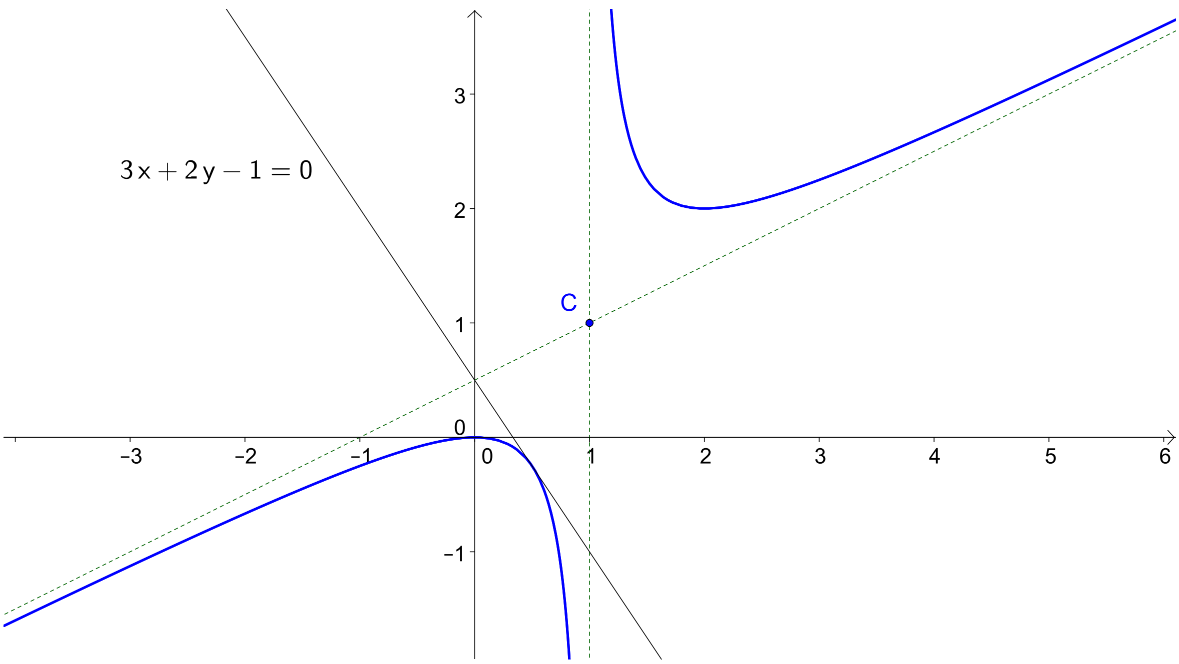
Problema 1. Conviene osservare subito che il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, per cui deve essere $c = 2$. Il grafico della funzione deve passare per l'origine, quindi risulta $b = 0 \wedge d \neq 0$.

Poiché il punto della retta $3\,x + 2\,y - 1 = 0$ avente ascissa $x = \frac{1}{2}$ ha ordinata $y = -\frac{1}{4}$, il grafico della funzione deve passare per $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; la retta $3\,x + 2\,y - 1 = 0$ ha coefficiente angolare $m = -\frac{3}{2}$ per cui deve risultare $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$; dal momento che la derivata di $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x}{2\,x + d}$ è $f'(x) = \dfrac{2\,x^2 + 2\,d\,x + a\,d}{(2\,x + d)^2}$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a}{2}}{1 + d} = -\dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + d + a\,d}{(1 + d)^2} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

si trova $a = 0$ e $d = -2$.

Lo studio della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{2\,x - 2}$ non pone particolari difficoltà. Il dominio è $x \neq 1$, la retta $x = 1$ è asintoto verticale, la retta $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ è asintoto obliquo, la derivata è $f'(x) = \dfrac{2\,x^2 - 4\,x}{(2\,x - 2)^2}$, $x = 0$ è punto di massimo relativo mentre $x = 2$ è punto di minimo relativo. Il grafico è il seguente:



Per verificare che la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{2\,x - 2}$ è simmetrica rispetto al punto $C(1, 1)$ (intersezione degli asintoti), per prima cosa scriviamo le equazioni della simmetria centrale di centro C:

$$\begin{cases} \dfrac{x + x'}{2} = 1 \\[2ex] \dfrac{y + y'}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}.$$

Ricavando x e y si ha $\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$ e sostituendo nell'equazione della curva $y = \dfrac{x^2}{2\,x - 2}$ si trova

$$2 - y' = \frac{(2 - x')^2}{2\,(2 - x') - 2} \Rightarrow y' = \frac{(x')^2}{2\,x' - 2}.$$

La circonferenza da determinare ha equazione $x^2 + (y-k)^2 = k^2$ ed intersecandola con la curva si ha

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2\,x-2} \\ x^2 + (y-k)^2 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2\,x-2} \\ x^2 + \left(\dfrac{x^2}{2\,x-2} - k\right)^2 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2\,x-2} \\ \dfrac{x^2\left(5\,x^2 + (-8-4\,k)\,x + 4\,k + 4\right)}{4\,(x-1)^2} = 0\,; \end{cases}$$

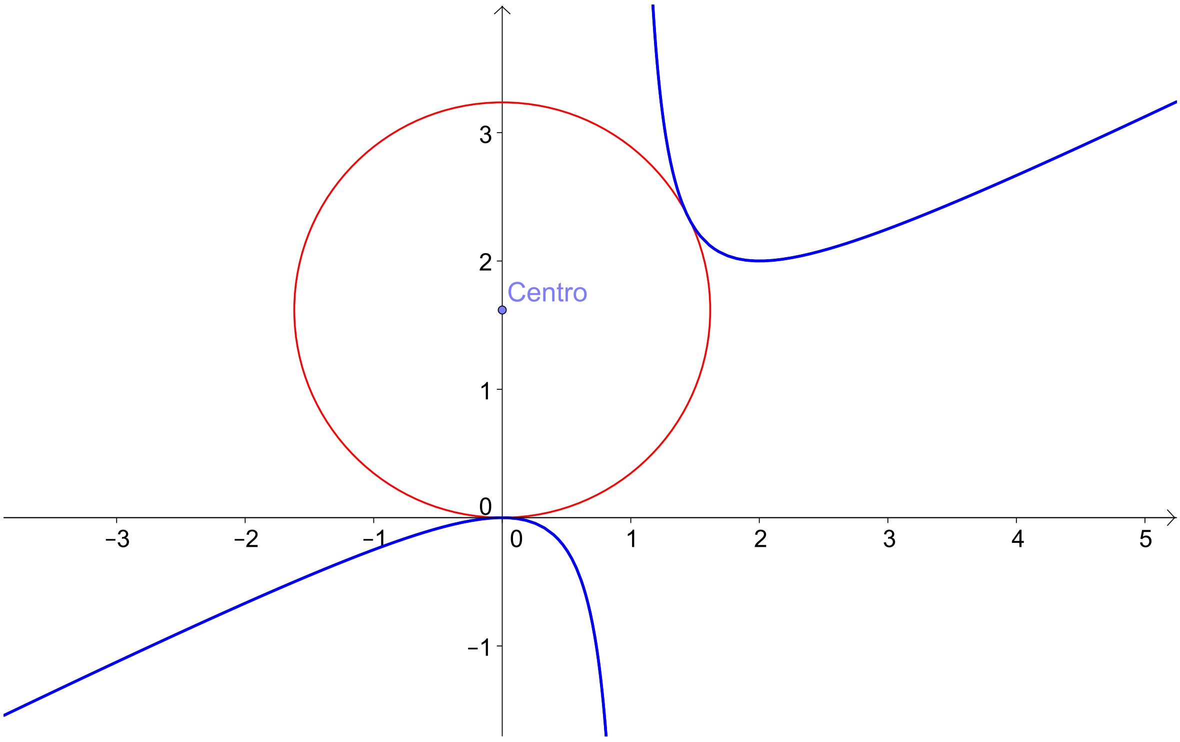
se vogliamo che la circonferenza sia tangente alla curva oltre che nell'origine anche in un altro punto, dobbiamo imporre che il discriminante del polinomio di secondo grado tra parentesi sia nullo:

$$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; (-8-4\,k)^2 - 20(4\,k+4) = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

La soluzione $k_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ va scartata in quanto il testo ci impone di trovare il centro sul semiasse *positivo* dell'asse y (si osservi che con questa soluzione si ottiene una circonferenza tangente al ramo inferiore del grafico $\mathcal{G}$ in due punti distinti).

La soluzione accettabile è $k_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ed in corrispondenza si ottiene la circonferenza di equazione cartesiana

$$x^2 + \left(y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2 + y^2 - \left(1+\sqrt{5}\,\right)y = 0\,.$$



Problema 2. Deve risultare

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \sqrt[3]{x^2+2\,x+1} = 1 + a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 + a = 1 + a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + a = b + c \\ \lim\limits_{x\to 1^+} b\,x\,e^{x-1} + c = b + c \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 2\,x = \lim\limits_{x\to 1^+} b\,e^{x-1}(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + a \\ 1 + a = 1 + a \\ 1 + a = b + c \\ b + c = b + c \\ 2 = 2\,b \end{cases}$$

da cui $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$. La retta tangente in $x = 1$ ha equazione $y = 2\,x - 2$.

Analizzando la derivabilità in $x=-1$, osservando che $\sqrt[3]{x^2+2\,x+1}=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, si ha

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=-\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to -1^+} 2\,x=-2\,;$$

in $x=-1$ la funzione presenta una *semicuspide*.

Problema 3. a) Riscriviamo il limite nella forma $\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\ln(1+3\,x)}{3\,x}\cdot(1-\cos x)^{\sin x}$; risulta $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3\,x)}{3\,x}=1$, mentre

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0} e^{\sin x\cdot\ln(1-\cos x)}$$

osservando che

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln(1-\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\sin x}}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\cdot\frac{1}{-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1}{-\cos x}=0\cdot 1\cdot 2\cdot(-1)=0$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\ln(1+3\,x)}{3\,x}\cdot(1-\cos x)^{\sin x}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3\,x)}{3\,x}\cdot\lim_{x\to 0}e^{\sin x\cdot\ln(1-\cos x)}=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot e^0=\frac{3}{2}\,.$$

b) Si ha $\lim_{x\to\pi^+}\cos(x)=-1$, mentre

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x-\pi)}\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to\pi^+}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{x-\pi}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{x-\pi}{2\,\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\overset{(H.)}{=}\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{2\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{-\sin x}=+\infty\,;$$

in definitiva abbiamo

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\cos(x)\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi^+}\cos(x)\cdot\lim_{x\to\pi^+}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x-\pi)}=-1\cdot(+\infty)=-\infty\,.$$

c) Mettendo in evidenza x al numeratore e al denominatore si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\,x+\sin(2\,x)}{\cos(3\,x)-5\,x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{\sin(2\,x)}{x}\right)}{x\left(\frac{\cos(3\,x)}{x}-5\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{\sin(2\,x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{\cos(3\,x)}{x}-5\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{\sin(2\,x)}{x}}{\frac{\cos(3\,x)}{x}-5}=-\frac{2}{5}\,.$$

Quesito 1. $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{x_0+h}{1-(x_0+h)}-\dfrac{x_0}{1-x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{(1-x_0)(1-x_0-h)}=\dfrac{1}{(1-x_0)^2}\,.$

Quesito 2. Il dominio della funzione $f(x)$ è $x<2$. La derivata è $f'(x)=\dfrac{x^2-x}{(x-2)\left[1+(x-1)^2\right]}$, quindi la funzione f decresce sull'intervallo $(-\infty,0)$, cresce sull'intervallo $(0,1)$, decresce sull'intervallo $(1,2)$.

Quesito 3. La funzione data è continua sull'intervallo $[1,5]$ ed è derivabile nei punti interni di tale intervallo, quindi è possibile applicare il teorema di Lagrange: esiste un punto $c\in(1,5)$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e quindi

$$\frac{1}{2\sqrt{c-1}}=\frac{4-2}{5-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2\sqrt{c-1}}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad c=2\,.$$

Quesito 4. La funzione è definita se $-1\le e^{2\sin x-1}\le 1$; poiché $e^{2\sin x-1}>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, basta risolvere la disequazione $e^{2\sin x-1}\le 1$ ossia $e^{2\sin x-1}\le e^0$ da cui $2\sin x-1\le 0\ \Rightarrow\ \sin x\le\frac{1}{2}$; il dominio della funzione f, pertanto, è $\left\{2\,k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2\,k\pi\right\}\cup\left\{\frac{5}{6}\,\pi+2\,k\pi\le x\le 2\,\pi+2\,k\pi\right\}$.

Quesito 5. La derivata della funzione è nulla sugli intervalli $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$ e $(0,+\infty)$, quindi la funzione è costante a tratti; la costante sull'intervallo $(-\infty,-2)$ è $\dfrac{\pi}{4}$, sull'intervallo $(-2,0)$ è $-\dfrac{3}{4}\pi$ ed infine sull'intervallo $(0,+\infty)$ è $\dfrac{\pi}{4}$. In definitiva possiamo riscrivere la funzione nel modo seguente:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x<-2\\[2ex] -\dfrac{3}{4}\pi & \text{se } -2<x<0\\[2ex] \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x>0\,.\end{cases}$$

Quesito 6. Consideriamo la retta tangente alla curva assegnata nel punto di ascissa x_0, di equazione cartesiana $y=(4\,x_0^3-12\,x_0^2)(x-x_0)+x_0^4-4\,x_0^3$; intersechiamo questa retta con la curva

$$\begin{cases} y=x^4-4\,x^3\\ y=(4\,x_0^3-12\,x_0^2)(x-x_0)+x_0^4-4\,x_0^3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} y=x^4-4\,x^3\\ x^4-4\,x^3+(-4\,x_0^3+12\,x_0^2)\,x+3\,x_0^4-8\,x_0^3=0\end{cases}$$

il polinomio di quarto grado ha x_0 come radice doppia, quindi possiamo dividere per $(x-x_0)^2$ ottenendo la seguente fattorizzazione:

$$x^4-4\,x^3+(-4\,x_0^3+12\,x_0^2)x+3\,x_0^4-8\,x_0^3=(x-x_0)^2\,\left(x^2+(2\,x_0-4)\,x+3\,x_0^2-8\,x_0\right)$$

poiché vogliamo che la retta sia bitangente alla curva, il polinomio di secondo grado in parentesi deve avere discriminante nullo:

$$\Delta=0\quad\Rightarrow\quad(2\,x_0-4)^2-4\,(3\,x_0^2-8\,x_0)=0\,;$$

si trovano le soluzioni $x_0=1\pm\sqrt{3}$ e **la retta bitangente richiesta ha equazione** $y=-8\,x-4$**.**

I punti di tangenza sono $A\big(1-\sqrt{3}\,,\,8\sqrt{3}-12\big)$ e $B\big(1+\sqrt{3}\,,\,-8\sqrt{3}-12\big)$.