Soluzioni verifica di Matematica
5^aE Liceo Scientifico - 17/10/2013

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x^2} & \text{se } x > -1\,. \end{cases}$$

Dire se la funzione è continua in $x = -1$; in caso negativo individuare il tipo di discontinuità e stabilire se f è continua a destra o a sinistra.

Soluzione. Calcoliamo il limite sinistro:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = 0$$

si osserva che, essendo $f(-1) = 0$, la funzione è continua a sinistra; calcoliamo il limite destro:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{1 - x^2} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(1+x)}(1-x)} = -\frac{3}{2}$$

il limite destro e quello sinistro sono finiti e distinti, quindi in $x = -1$ si ha una discontinuità di prima specie, con salto pari a

$$\left| \lim_{x \to -1^-} f(x) - \lim_{x \to -1^+} f(x) \right| = \left| 0 - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| = \frac{3}{2}\,.$$

Esercizio 2. Calcolare, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\,x}$ nel suo punto di ascissa 1.

Soluzione. In base alla definizione abbiamo

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(1+h)^2 + 2(1+h)} - \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2 + 4\,h + 3} - \sqrt{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2 + 4\,h + 3} - \sqrt{3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 4\,h + 3} + \sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 4\,h + 3} + \sqrt{3}} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4\,h + \cancel{3} - \cancel{3}}{h(\sqrt{h^2 + 4\,h + 3} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}(\sqrt{h^2 + 4\,h + 3} + \sqrt{3})} = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Esercizio 3. Calcola la derivata delle funzioni $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$ e $g(x) = -2\,x\,e^{\sin(4\,x^2 + 2\,x)}$.

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x^2 - 1} \cdot 2\,x \cdot (x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1) \cdot 2\,x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\dfrac{2\,x(x^2 + 1) - 2\,x(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2\,x\left[x^2 + 1 - (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)\right]}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}\,.$$

$$g'(x) = -2\,e^{\sin(4\,x^2 + 2\,x)} + \left[-2\,x e^{\sin(4\,x^2 + 2\,x)} \cdot \cos(4\,x^2 + 2\,x) \cdot (8\,x + 2)\right] =$$

$$= -2\,e^{\sin(4\,x^2 + 2\,x)}\left[1 + (8\,x^2 + 2\,x)\,\cos(4\,x^2 + 2\,x)\right]\,.$$

Esercizio 4. Si consideri la curva $y = \dfrac{2-3\,x}{2\,x+1}$.
a) Determinare le due rette tangenti al grafico parallele alla retta di equazione $2\,x+14\,y-5=0$; qual è la distanza tra le tangenti trovate?
b) Determinare le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto $P(1,-5)$ alla curva e si scriva l'ampiezza in gradi e primi sessagesimali dell'angolo acuto da esse formato.
Soluzione. a) La derivata è $y' = -\dfrac{7}{(2\,x+1)^2}$, quindi basta uguagliare al coefficiente angolare della retta assegnata:

$$-\frac{7}{(2\,x+1)^2} = -\frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4\ ;\ x_2 = 3$$

i punti di tangenza sono $T_1(-4,-2)$ e $T_2(3,-1)$ e le rispettive rette tangenti hanno equazione $y = -\dfrac{x}{7} - \dfrac{18}{7}$ e $y = -\dfrac{x}{7} - \dfrac{4}{7}$. La distanza tra queste rette può essere determinata scegliendo un punto qualsiasi della prima, ad esempio T_1, e calcolando la sua distanza dalla seconda retta; svolgendo i calcoli si trova $d = \dfrac{7\sqrt{2}}{5}$.

b) Preso il generico punto della curva $A\left(x_0\,,\ \dfrac{2-3\,x_0}{2\,x_0+1}\right)$ la retta tangente ha equazione

$$y - \frac{2-3\,x_0}{2\,x_0+1} = -\frac{7}{(2\,x_0+1)^2}(x-x_0)\,;$$

imponendo il passaggio per il punto $P(1,-5)$ si ha l'equazione in x_0

$$-5 - \frac{2-3\,x_0}{2\,x_0+1} = -\frac{7}{(2\,x_0+1)^2}(1-x_0)$$

che è risolta per $x_0 = 0$ oppure per $x_0 = -2$.
Le rispettive rette tangenti hanno equazioni $y = -7\,x+2$ e $y = -\dfrac{7}{9}\,x - \dfrac{38}{9}$. Per quanto riguarda l'angolo acuto α da esse formato si ha

$$\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{7}{9}-(-7)}{1+\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot(-7)}\right| = \frac{28}{29} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{28}{29} = 43°59'42''\,.$$

Esercizio 5. Determinare la parabola γ passante per $P(1,0)$ e tangente nel suo punto di intersezione con l'asse delle ordinate alla retta $y = -12\,x + \dfrac{15}{2}$.
Si consideri la curva $y = \dfrac{a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d}{x^2+e\,x+f}$.
Determinare il valore dei parametri in modo che la curva sia tangente alla parabola γ nel punto $P(1,0)$ ed abbia come asintoti le rette $y = 2\,x+1$, $x = 2$ e $x = -1$.
Quali sono le ulteriori intersezioni della curva con la parabola γ?
Soluzione. La parabola ha equazione del tipo $y = a\,x^2 - 12\,x + \dfrac{15}{2}$; imponendo il passaggio per P si trova $a = \dfrac{9}{2}$; l'equazione della parabola γ, pertanto, è

$$\gamma : y = \frac{9}{2}\,x^2 - 12\,x + \frac{15}{2}$$

ed essendo $y' = 9\,x - 12$, la sua retta tangente in P ha pendenza uguale a $y'(1) = -3$.

Per quanto riguarda la curva da determinare, conviene subito imporre che il denominatore abbia come radici $x = 2$ e $x = -1$, trovando $e = -1$, $f = -2$. Con la divisione polinomiale possiamo riscrivere l'equazione della curva nel modo seguente:

$$y = a\,x + a + b + \frac{(3\,a+b+c)\,x + 2\,a + 2\,b + d}{x^2 - x - 2}\,;$$

poiché l'asintoto obliquo deve avere equazione $y = 2\,x+1$, deve risultare

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}\ .$$

L'equazione della curva, per il momento, ha la seguente forma:

$$y = \frac{2\,x^3 - x^2 + c\,x + d}{x^2 - x - 2}$$

ed ha derivata

$$y' = \frac{2\,x^4 - 4\,x^3 + (-c-11)\,x^2 + (4-2\,d)\,x + d - 2\,c}{(x^2 - x - 2)^2}\,.$$

I parametri restanti c, d sono determinati con le ultime due condizioni: passaggio per $P(1,0)$ e derivata uguale a -3 in $x = 1$:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2 - 1 + c + d}{1 - 1 - 2} \\[2ex] -3 = \dfrac{2 - 4 + (-c-11) + (4 - 2\,d) + d - 2\,c}{(-2)^2} \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ricava $c = 2$, $d = -3$; in definitiva la curva ha equazione

$$y = \frac{2\,x^3 - x^2 + 2\,x - 3}{x^2 - x - 2}\,.$$

Intersecando la curva ottenuta con la parabola γ si ha

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\,x^3 - x^2 + 2\,x - 3}{x^2 - x - 2} \\[2ex] y = \dfrac{9}{2}\,x^2 - 12\,x + \dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{2}\,x^2 - 12\,x + \dfrac{15}{2} = \dfrac{2\,x^3 - x^2 + 2\,x - 3}{x^2 - x - 2} \\[2ex] y = \dfrac{9}{2}\,x^2 - 12\,x + \dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9\,x^4 - 37\,x^3 + 23\,x^2 + 29\,x - 24}{x^2 - x - 2} = 0 \\[2ex] y = \dfrac{9}{2}\,x^2 - 12\,x + \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Sappiamo che le due curve sono tangenti in $P(1,0)$, quindi il polinomio $9\,x^4 - 37\,x^3 + 23\,x^2 + 29\,x - 24$ ha $x = 1$ come radice *almeno* doppia; tenendo conto di ciò possiamo fattorizzarlo nella forma

$$(9\,x^2 - 19\,x - 24)(x-1)^2 = 0$$

e risolvere l'equazione di secondo grado nella seconda parentesi, trovando così $x = 3$, $x = -\dfrac{8}{9}$.

Le ulteriori intersezioni tra le due curve, pertanto, sono i punti di coordinate $(3\,,\,12)$ e $\left(-\dfrac{8}{9}\,,\,\dfrac{391}{18}\right)$.

Esercizio 6. Determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti ad entrambe le curve $y = \ln x$ e $y = 2\,\ln x$.

Soluzione. Presi i punti $T_1(x_1\,,\,\ln x_1)$ e $T_2(x_2\,,\,2\,\ln x_2)$ sulle due curve, scriviamo le equazioni delle rispettive rette tangenti:

$$y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + \ln x_1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x_1}\,x + \ln x_1 - 1$$

$$y = \frac{2}{x_2}(x - x_2) + 2\,\ln x_2 \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{x_2}\,x + 2\,\ln x_2 - 2$$

poiché le due rette devono coincidere, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{2}{x_2} \\[2ex] \ln x_1 - 1 = 2\,\ln x_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2\,x_1 \\[2ex] \ln x_1 + 1 = 2\,\ln(2\,x_1) \end{cases}$$

risolviamo la seconda equazione:

$$\ln x_1 + 1 = 2\,\ln(2\,x_1) \;\Rightarrow\; \ln x_1 + 1 = 2\,[\ln 2 + \ln(x_1)] \;\Rightarrow\; \ln x_1 + 1 = 2\,\ln 2 + 2\,\ln(x_1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln x_1 = 1 - 2\,\ln 2 \;\Rightarrow\; x_1 = e^{1 - 2\,\ln 2} \;\Rightarrow\; x_1 = e^{1 - \ln 4} = \frac{e}{4}\,,$$

da cui $x_2 = \dfrac{e}{2}$. Esiste pertanto una sola retta tangente ad entrambe le curve assegnate, di equazione

$$y = \frac{4}{e}\,x - 2\,\ln 2\,.$$

Esercizio 7. Determinare le derivate delle funzioni

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{2\,x-\sin(2\,x)}{4}\,.$$

Si verifichi che le due curve hanno, in punti di uguale ascissa, rette tangenti tra loro perpendicolari.
Soluzione. Basta verificare che il prodotto delle derivate è uguale a -1. Si ha

$$f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x} \quad , \quad g'(x)=\frac{1-\cos(2\,x)}{2}=\frac{1-(1-2\,\sin^2 x)}{2}=\sin^2 x\,;$$

il loro prodotto è

$$f'(x)\cdot g'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x=-1\,.$$

Esercizio 8. Si consideri la curva $y=e^{\frac{x}{2}+1}$ e sia P un suo punto. La retta tangente in P al grafico e la retta passante per P e parallela all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente nei punti A e B.
a) Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante.
b) Si trovi il punto P per cui la lunghezza del segmento AP sia uguale a $\sqrt{5}$.
Soluzione. a) L'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P(x_0\,,\,e^{\frac{x_0}{2}+1})$ è

$$y-e^{\frac{x_0}{2}+1}=\frac{1}{2}\,e^{\frac{x_0}{2}+1}\,(x-x_0)\,.$$

L'intersezione con l'asse delle ascisse si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y-e^{\frac{x_0}{2}+1}=\frac{1}{2}\,e^{\frac{x_0}{2}+1}\,(x-x_0) \\ y=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -e^{\frac{x_0}{2}+1}=\frac{1}{2}\,e^{\frac{x_0}{2}+1}\,(x-x_0) \\ y=0 \end{cases}$$

la prima equazione si risolve così:

$$e^{\frac{x_0}{2}+1}\left(\frac{x-x_0}{2}+1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=x_0-2\,.$$

La curva assegnata interseca l'asse x nel punto $A(x_0-2\,,\,0)$; il segmento AB ha lunghezza uguale a 2 per ogni x_0.
b) Si ha

$$\sqrt{(x_0-(x_0-2))^2+\left(e^{\frac{x_0}{2}+1}-0\right)^2}=\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{4+\left(e^{\frac{x_0}{2}+1}\right)^2}=\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad 4+\left(e^{\frac{x_0}{2}+1}\right)^2=5 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 4+e^{2\cdot\left(\frac{x_0}{2}+1\right)}=5 \quad\Rightarrow\quad 4+e^{x_0+2}=5 \quad\Rightarrow\quad e^{x_0+2}=1 \quad\Rightarrow\quad x_0+2=0 \quad\Rightarrow\quad x_0=-2\,;$$

il punto P richiesto, pertanto, ha coordinate $P(-2\,,\,1)$.

Esercizio 9. Assegnata la curva $y=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$, determinare il valore dei parametri in modo che passi per $Q(0,2)$, abbia nel punto di ascissa 3 tangente parallela all'asse delle ascisse e risulti tangente alla circonferenza $x^2+y^2-10\,x-4\,y+12=0$ nel punto $P(1,1)$.
Soluzione. Il centro della circonferenza è $C(5,2)$. Per prima cosa osserviamo che la tangente alla circonferenza nel punto P, essendo perpendicolare al raggio CP di pendenza $\frac{1}{4}$, ha pendenza uguale a -4. Dobbiamo imporre che la curva passi per i punti $Q(0,2)$ e $P(1,1)$, abbia derivata nulla in $x=3$ ed abbia derivata uguale a -4 in $x=1$. Essendo la derivata $y'=3\,ax^2+2\,bx+c$, il sistema che riassume tutte le condizioni descritte è il seguente:

$$\begin{cases} 2=d \\ 1=a+b+c+d \\ 0=27\,a+6\,b+c \\ -4=3\,a+2\,b+c \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$$

la curva ha pertanto equazione $y=x^3-5\,x^2+3\,x+2$.

Esercizio 10. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva $y = (x-2)^{\cos(x-\pi)}$ nel suo punto di ascissa $x = \pi$. Si verifichi che la stessa retta è tangente alla curva anche nei punti di ascissa $x = (2\,k+3)\,\pi$ dove k è intero e ≥ 0.

Soluzione. Riscriviamo per prima cosa la funzione nel modo seguente:

$$y = e^{\ln(x-2)^{\cos(x-\pi)}} = e^{\cos(x-\pi)\ln(x-2)}$$

derivando si ottiene

$$y' = e^{\cos(x-\pi)\ln(x-2)} \cdot \left[-\sin(x-\pi)\ln(x-2) + \cos(x-\pi) \cdot \frac{1}{x-2} \right]$$

ossia

$$y' = (x-2)^{\cos(x-\pi)} \cdot \left[-\sin(x-\pi)\ln(x-2) + \cos(x-\pi) \cdot \frac{1}{x-2} \right].$$

Poiché vogliamo determinare l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa π, basta sostituire $x = \pi$:

$$y'(\pi) = (\pi-2)^{\overbrace{\cos(\pi-\pi)}^{=1}} \cdot \left[-\underbrace{\sin(\pi-\pi)}_{=0}\ln(\pi-2) + \underbrace{\cos(\pi-\pi)}_{=1} \cdot \frac{1}{\pi-2} \right] = (\pi-2) \cdot \frac{1}{\pi-2} = 1\,;$$

dal momento che l'ordinata del punto è $\pi - 2$, la retta tangente ha equazione $y = x - 2$.

Per verificare che la retta trovata è tangente alla curva anche nei punti indicati, è sufficiente verificare, sostituendo i valori delle ascisse, che la curva e la retta hanno la stessa ordinata e la stessa derivata ($= 1$).

Le ordinate sulla curva dei punti di ascissa $x = (2\,k+3)\,\pi$ sono

$$y((2\,k+3)\,\pi) = ((2\,k+3)\,\pi - 2)^{\overbrace{\cos((2\,k+3)\,\pi-\pi)}^{=1}} = (2\,k+3)\,\pi - 2$$

e coincidono, per ogni k, con le ordinate sulla retta $y = x - 2$.

La derivata nei punti di ascissa $x = (2\,k+3)\,\pi$ è uguale a

$$((2\,k+3)\,\pi-2)^{\overbrace{\cos((2\,k+3)\,\pi-\pi)}^{=1}} \cdot \left[-\underbrace{\sin((2\,k+3)\,\pi-\pi)}_{=0}\ln((2\,k+3)\,\pi-2) + \underbrace{\cos((2\,k+3)\,\pi-\pi)}_{=1} \cdot \frac{1}{(2\,k+3)\,\pi-2} \right] =$$

$$= ((2\,k+3)\,\pi-2) \cdot \frac{1}{(2\,k+3)\,\pi-2} = 1\,;$$

ciò conclude positivamente la nostra verifica: la retta $y = x - 2$, nei punti indicati, è tangente alla curva assegnata.