Soluzione es. 42 verifica orale 1^a Scientifico 7/04/2009

Francesco Daddi

Si calcoli la seguente somma infinita:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+...$$

Soluzione.
(Primo metodo) Spezziamo in due la somma infinita nel seguente modo:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+...=$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+...\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\frac{1}{128}+...\right)=$$

$$=\left[1+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^3+...\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^3+...\right]=$$

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{6}{5}\ .$$

(Secondo metodo) Calcoliamo le somme a due a due:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+...=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)-\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\right)+...=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{32}-\frac{3}{128}+...=$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^3+...\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{6}{5}\ .$$

Osservazione. Prendendo i primi 8 addendi troviamo la somma parziale $1,19531...$, mentre prendendo i primi 16 termini della somma troviamo un valore più vicino a $\frac{6}{5}$ $(=1,2)$: $1,19998...$