Istituto Superiore "XXV aprile" Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Verifica di Matematica

5^aE Liceo Scientifico - 14/11/2013

Nome e cognome _____

Punteggio di partenza: $1,0/10$. Lo studente deve risolvere i **tre** problemi e **tre** quesiti.
Il problema 1 vale $3,0/10$, i problemi 2 e 3 valgono $1,5/10$, e ogni quesito vale $1,0/10$.

Problema 1. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + b}{c\,x + d}$, con a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

• Determinare a, b, c, d in modo che il grafico della funzione passi per l'origine, risulti nel suo punto di ascissa $x = \frac{1}{2}$ tangente alla retta $3\,x + 2\,y - 1 = 0$ ed abbia un asintoto obliquo parallelo alla retta $13\,x - 26\,y - \sqrt{37} = 0$.

Dopo aver verificato che risulta $a = 0$, $b = 0$, $c = 2$, $d = -2$, si risponda alle seguenti domande.

• Si studi la funzione ottenuta e si tracci il suo grafico $\mathcal{G}$.

• Si verifichi che la funzione è simmetrica rispetto al punto C di intersezione dei suoi asintoti.

• Determinare l'equazione della circonferenza avente centro sul semiasse positivo dell'asse y e tangente ad entrambi i rami del grafico $\mathcal{G}$.

Problema 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 2\,x + 1} & \text{se } x < -1 \\ x^2 + a & \text{se } -1 \le x < 1 \\ b\,x\,e^{x-1} + c & \text{se } x \ge 1\,. \end{cases}$$

Si determinino i coefficienti a, b, c in modo che $f(x)$ risulti continua in $x = -1$ e derivabile in $x = 1$.

Con i valori trovati di a, b, c:

• si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 1$;

• si verifichi che la funzione ottenuta non è derivabile nel punto $x = -1$, classificandolo.

Problema 3. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 3\,x)\cdot(1 - \cos x)^{\sin x}}{2\,x} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to \pi^+} \frac{\cos(x)\cdot\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\ln(x - \pi)} \quad , \quad c)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{2\,x + \sin(2\,x)}{\cos(3\,x) - 5\,x}\,.$$

Quesito 1. Determinare, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$ in $x_0 \neq 1$.

Quesito 2. Determinare il dominio e gli intervalli di monotonia della funzione

$$f(x) = \arctan(x - 1) + \ln(2 - x) + \sqrt{2}\,.$$

Quesito 3. Dopo aver verificato che è possibile applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$ sull'intervallo $[1, 5]$, si trovino i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema suddetto.

Quesito 4. Determinare dominio e derivata della funzione $f(x) = \arccos\left(e^{2\sin x - 1}\right)$.

Quesito 5. Scrivere in maniera più semplice la funzione $f(x) = \arctan\dfrac{2}{x} + \arctan\dfrac{x - 2}{x + 2}$.

Quesito 6. Si consideri la curva $y = x^4 - 4\,x^3$. Determinare l'equazione della retta *bitangente* alla curva, ossia della retta che è tangente alla curva in due punti distinti A e B.

Punteggio esercizi:

(la seguente tabella deve essere riempita dal docente)

P1	P2	P3	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Voto