Verifica scritta del 1 giugno 2010

Punteggio di partenza: 2/10

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4\,x^4+6}{x^3-x^2+3\,x-8}$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x^4-3\,x^2+6\,x-5}{x^2-5\,x^4-8\,x}$$

Esercizio 3. Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2\,x-9}{x-2}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2\,x^2-4\,x-6}{x^2-9}$$

Esercizio 5. Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^3-2\,x^2-3\,x+2$ nel suo punto di ascissa $x=-1$.

Esercizio 6. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=\dfrac{3\,x^2+2\,x+4}{x-1}$.

Esercizio 7. Determinare tutti gli asintoti della funzione dell'esercizio precedente.

Esercizio 8. Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{2\,x^2-12\,x+18}{4-x^2}$.

Esercizio 9. Quanti tipi di discontinuità esistono? Fai degli esempi.

Soluzione della verifica scritta del 1 giugno 2010

Esercizio 1. *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4\,x^4+6}{x^3-x^2+3\,x-8}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4\,x^4+6}{x^3-x^2+3\,x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4\,x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} -4\,x = -\infty\ .$$

Esercizio 2. *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x^4-3\,x^2+6\,x-5}{x^2-5\,x^4-8\,x}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x^4-3\,x^2+6\,x-5}{x^2-5\,x^4-8\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x^4}{-5\,x^4} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{5} = -\frac{2}{5}\ .$$

Esercizio 3. *Calcola il seguente limite:*

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2-2\,x-9}{x-2}$$

Soluzione. Sostituendo $x=2$ otteniamo $\dfrac{2^2-2\cdot2-9}{2-2} = \dfrac{-9}{0}$, quindi il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$; poiché in un intorno sinistro di $x=2$ il denominatore ha segno negativo, il limite è $+\infty$ (infatti risulta $\dfrac{-9}{0^-} = +\infty$) .

Esercizio 4. *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to3^+} \frac{2\,x^2-4\,x-6}{x^2-9}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to3^+} \frac{2\,x^2-4\,x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to3^+} \frac{2(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3^+} \frac{2(x+1)}{(x+3)} = \frac{2\cdot(3+1)}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\ .$$

Esercizio 5. *Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ *nel suo punto di ascissa* $x = -1$.

Soluzione. Calcoliamo il valore della funzione in $x = -1$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 2$$

determiniamo ora la derivata di $f(x)$:

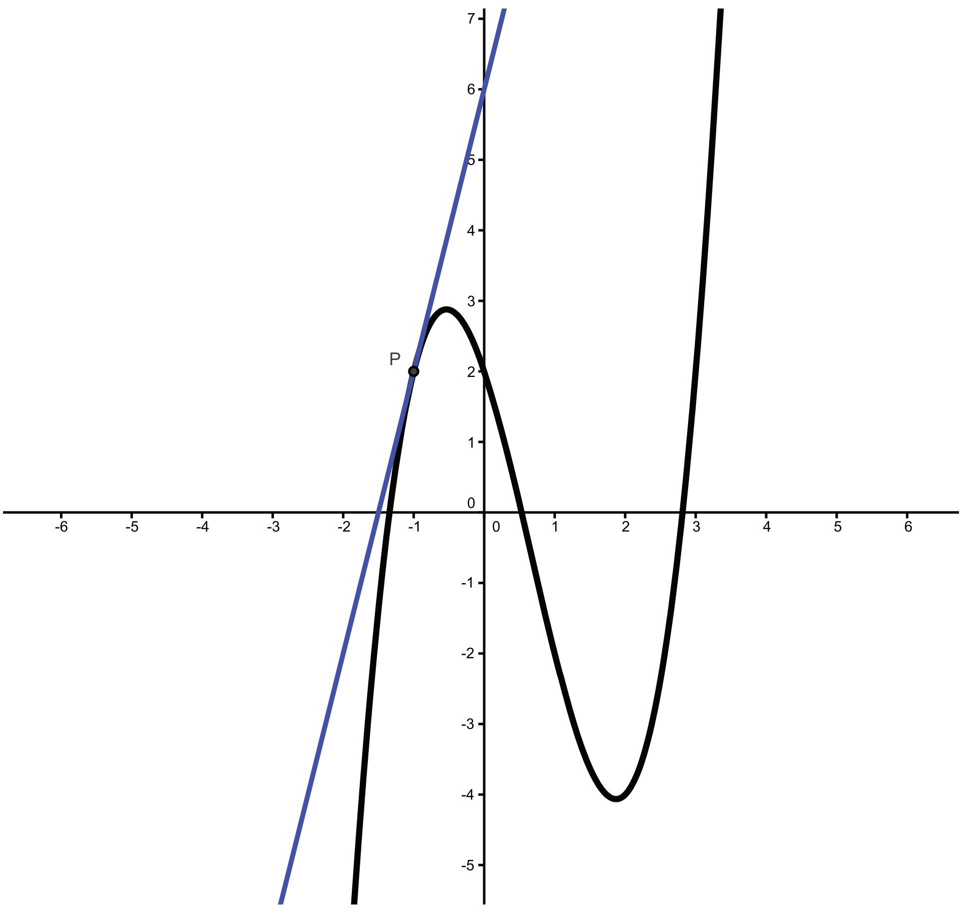
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

valutiamola in $x = -1$:

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 3 = 4\,;$$

la retta tangente ha quindi equazione

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = 2 + 4(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = 4x + 6\,.$$



Esercizio 6. *Calcolare la derivata della funzione* $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 4}{x - 1}$.

Soluzione.

$$f'(x) = \frac{(6x+2) \cdot (x-1) - (3x^2 + 2x + 4) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - 6}{(x-1)^2}\,.$$

Esercizio 7. *Determinare tutti gli asintoti della funzione dell'esercizio precedente.*

Soluzione. La funzione $f(x) = \dfrac{3\,x^2 + 2\,x + 4}{x-1}$ presenta due asintoti: un asintoto verticale di equazione cartesiana $x = 1$ e un asintoto obliquo la cui equazione può essere ricavata mediante la divisione polinomiale: $y = 3\,x + 5$.

Esercizio 8. *Studiare la funzione* $f(x) = \dfrac{2\,x^2 - 12\,x + 18}{4 - x^2}$.

Soluzione. Il dominio della funzione è $D_f = \mathbb{R} - \{2\,;\,-2\}$; la funzione ha un solo zero: $x = 3$. La funzione è positiva per $-2 < x < 2$; ci sono due asintoti verticali di equazione $x = -2$ e $x = 2$; vi è un asintoto orizzontale di equazione $y = -2$.
Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{(4\,x - 12)\cdot(4 - x^2) - (2\,x^2 - 12\,x + 18)\cdot(-2\,x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{52\,x - 12\,x^2 - 48}{(4 - x^2)^2}$$

risulta che la derivata $f'(x)$ è positiva (e quindi la funzione è crescente) per $\left\{\dfrac{4}{3} < x < 2\right\} \cup \{2 < x < 3\}$ (**si faccia attenzione al fatto che $x = 2$, non facendo parte del dominio di $f(x)$, deve essere escluso**); vi è quindi un punto di minimo relativo in $x = \dfrac{4}{3}$ e un punto di massimo relativo in $x = 3$.