Verifica scritta - 8 giugno 2010 (assenti del 1 giugno 2010)

Punteggio di partenza: 2/10

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^5 - 2\,x^3 - 7}{x^4 - 2\,x^2 - 3\,x + 5}$$

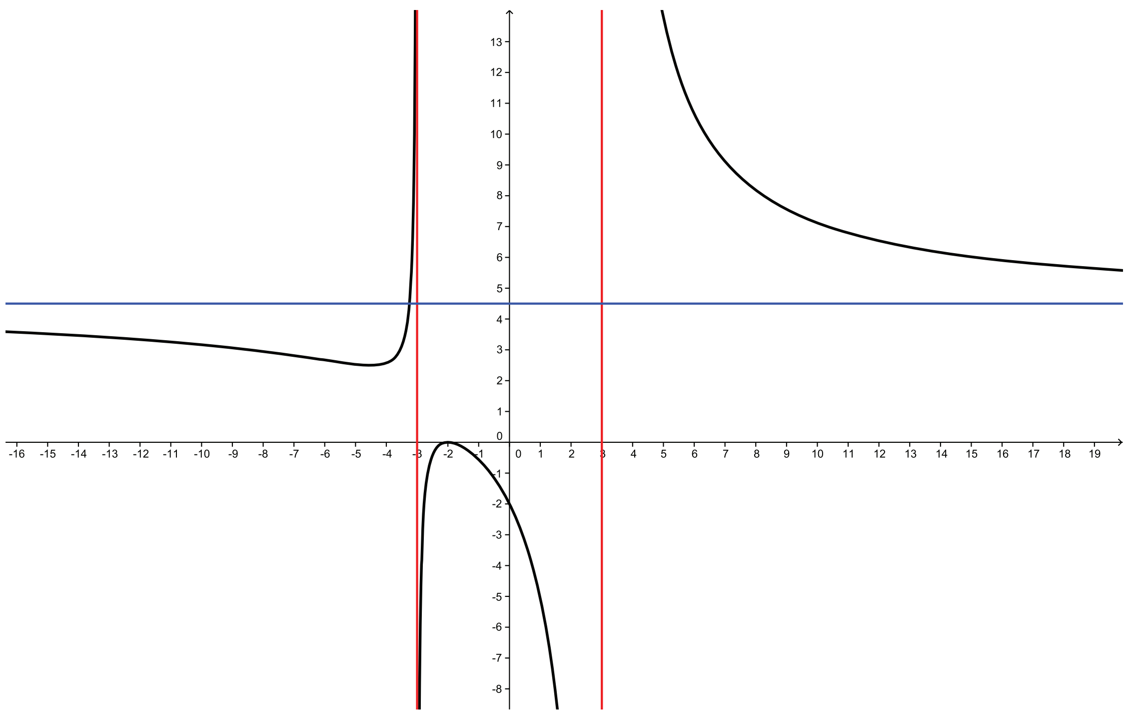
Esercizio 2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{2\,x - 3}{25 - x^2}$$

Esercizio 3. Determinare l’equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = -2\,x^3 + x^2 + 4\,x - 1$ nel suo punto di ascissa $x = -1$.

Esercizio 4. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{24\,x + 24}{x^2 - 2\,x + 6}$; in particolare si determini dominio, zeri, segno, asintoti, eventuali massimi e minimi.

Esercizio 5. Si trovi, facendo riferimento al grafico qui sotto, una possibile espressione analitica per la funzione.



Soluzione della verifica scritta del 8 giugno 2010 (assenti del 1 giugno 2010)

Esercizio 1. *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^5 - 2\,x^3 - 7}{x^4 - 2\,x^2 - 3\,x + 5}$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^5 - 2\,x^3 - 7}{x^4 - 2\,x^2 - 3\,x + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^5}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} 4\,x = +\infty\,.$$

Esercizio 2. *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{2\,x - 3}{25 - x^2}$$

Soluzione. Sostituendo troviamo $\dfrac{7}{0}$: il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$. Per stabilire il segno basta studiare il segno del denominatore: la quantità $25 - x^2$ è positiva se e solo se $-5 < x < 5$, quindi in un intorno destro di 5 il denominatore è negativo. In definitiva abbiamo che il limite è $-\infty$ (il numeratore è > 0, mentre il denominatore, come detto, è < 0).

Esercizio 3. *Determinare l’equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = -2\,x^3 + x^2 + 4\,x - 1$ *nel suo punto di ascissa* $x = -1$.

Soluzione. Calcoliamo il valore della funzione in $x = -1$:

$$f(-1) = -2\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + 4\cdot(-1) - 1 = 2 + 1 - 4 - 1 = -2$$

calcoliamo ora la derivata:

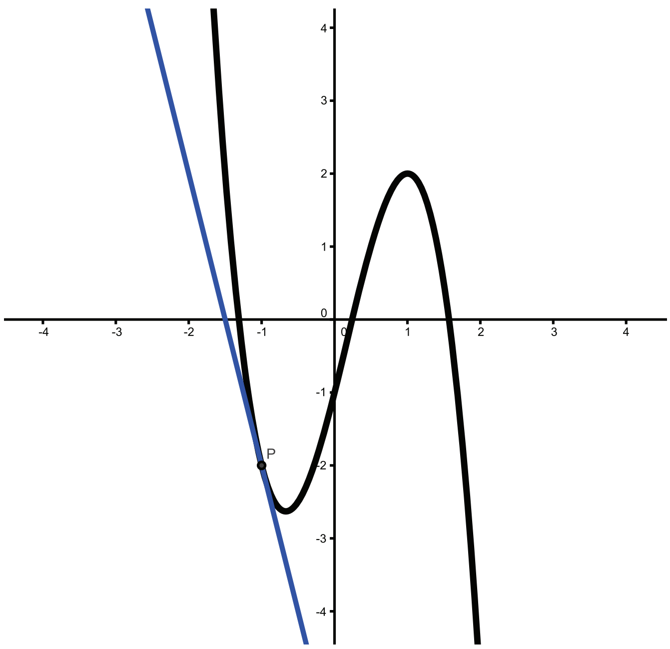
$$f'(x) = -2\cdot 3\cdot x^2 + 2\,x + 4 = -6\,x^2 + 2\,x + 4$$

valutiamola in $x = -1$:

$$f'(-1) = -6\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 4 = -6 - 2 + 4 = -4\,;$$

l’equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = -1$ è la seguente:

$$y = f(-1) + f'(-1)\big(x - (-1)\big) \;\Rightarrow\; y = f(-1) + f'(-1)(x+1) \;\Rightarrow\; y = -2 + (-4)\cdot(x+1) \;\Rightarrow\; y = -4\,x - 6\,.$$

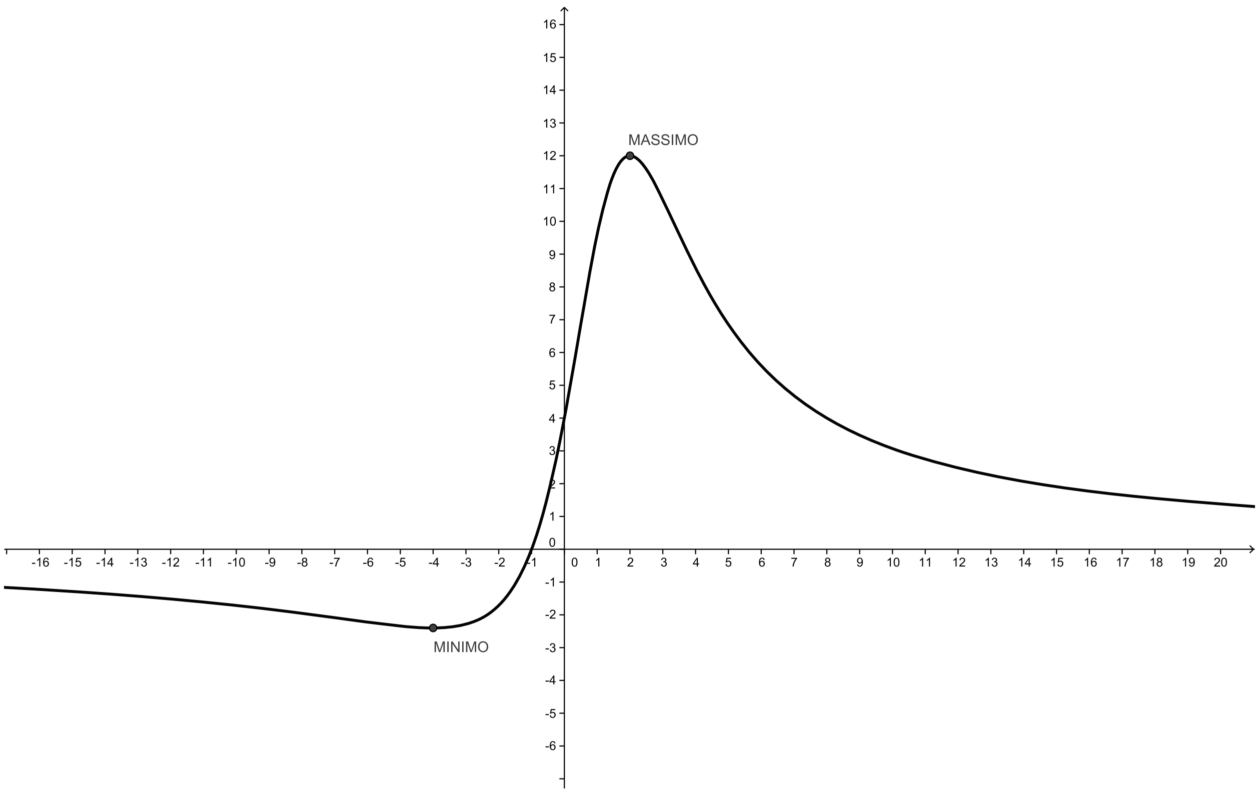


Esercizio 4. *Studiare la funzione* $f(x) = \dfrac{24\,x + 24}{x^2 - 2\,x + 6}$ *; in particolare si determini dominio, zeri, segno, asintoti, eventuali massimi e minimi.*

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$; si ha uno zero in $x = -1$. La funzione è positiva se $x > -1$, ha come asintoto orizzontale l'asse delle x (il grado del numeratore è minore del grado del denominatore) mentre non ci sono asintoti verticali. Calcolando la derivata di $f(x)$ troviamo:

$$f'(x) = \frac{24 \cdot (x^2 - 2\,x + 6) - (24\,x + 24) \cdot (2\,x - 2)}{(x^2 - 2\,x + 6)^2} = \frac{-24\,(x^2 + 2\,x - 8)}{(x^2 - 2\,x + 6)^2}$$

la derivata è positiva se $\{-4 < x < 2\}$, mentre è negativa per $\{x < -4\} \cup \{x > 2\}$: la funzione è crescente per $\{-4 < x < 2\}$ ed è decrescente per $\{x < -4\}$ e per $\{x > 2\}$. La funzione ha un **minimo assoluto** in $x = -4$ e un **massimo assoluto** in $x = 2$ (i valori che assume la funzione in tali punti sono: $f(-4) = -\frac{12}{5} = -2,4$ e $f(2) = 12$).



Esercizio 5. *Si trovi, facendo riferimento al grafico* **(si veda il file con la verifica)***, una possibile espressione analitica per la funzione.*

Soluzione. La funzione ha come asintoti verticali le due rette $x = -3$ e $x = 3$; la funzione inoltre ha un massimo relativo in $x = -2$ e il valore corrispondente è $f(-2) = 0$, per cui possiamo scrivere

$$f(x) = k\,\frac{(x + 2)^2}{x^2 - 9}$$

la funzione ha la retta $y = 4,5 = \dfrac{9}{2}$ come asintoto orizzontale, quindi basta porre $k = \dfrac{9}{2}$:

$$f(x) = \frac{9}{2} \cdot \frac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 - 9} = \frac{9\,x^2 + 36\,x + 36}{2\,x^2 - 18}\ .$$

osserviamo che la funzione passa, come si osserva nel grafico, per il punto $(0\,;\,-2)$.