

Verifica scritta del 9 gennaio 2010

Studia le seguenti funzioni:

Esercizio 1. $f(x) = \frac{6x - 2}{8 - 2x - x^2}$

Esercizio 2. $f(x) = \frac{12x - 12}{x^2 + 4x + 4}$

Esercizio 3. $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{3 - 3x^2}$

Soluzione verifica scritta del 9 gennaio 2010

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{6x - 2}{8 - 2x - x^2}$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

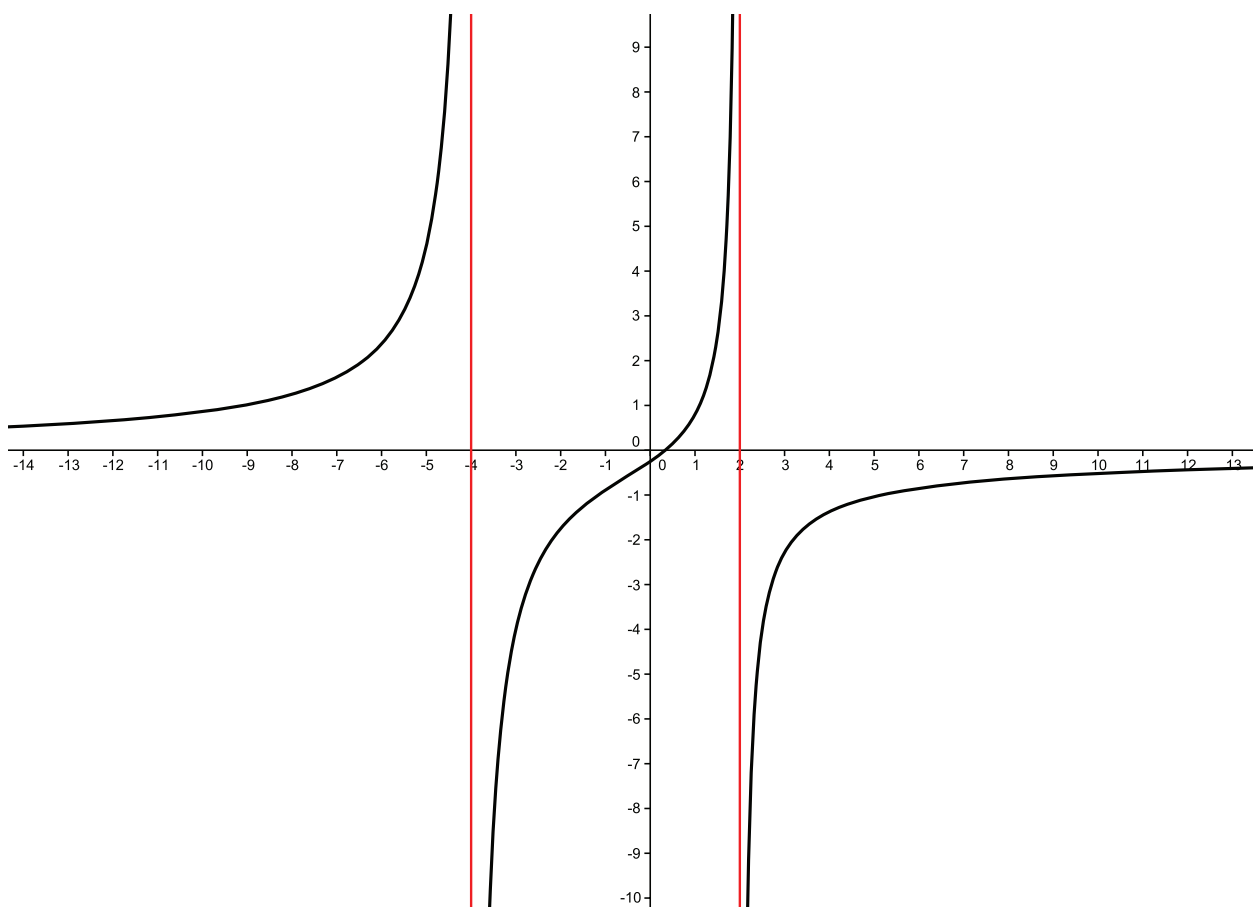
$$D_f = \{x \neq -4 \wedge x \neq 2\} ;$$

la funzione presenta uno zero per $x = \frac{1}{3}$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \Rightarrow 6x - 2 > 0 \Rightarrow \left\{x > \frac{1}{3}\right\}$$

$$D > 0 \Rightarrow 8 - 2x - x^2 > 0 \Rightarrow \{-4 < x < 2\}$$

la funzione è positiva per $\{x < -4\} \cup \left\{\frac{1}{3} < x < 2\right\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la retta $y = 0$ (asse x) è **asintoto orizzontale** per la funzione. Le rette $x = -4$ e $x = 2$ sono **asintoti verticali** per la funzione.



Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{12x - 12}{x^2 + 4x + 4}$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

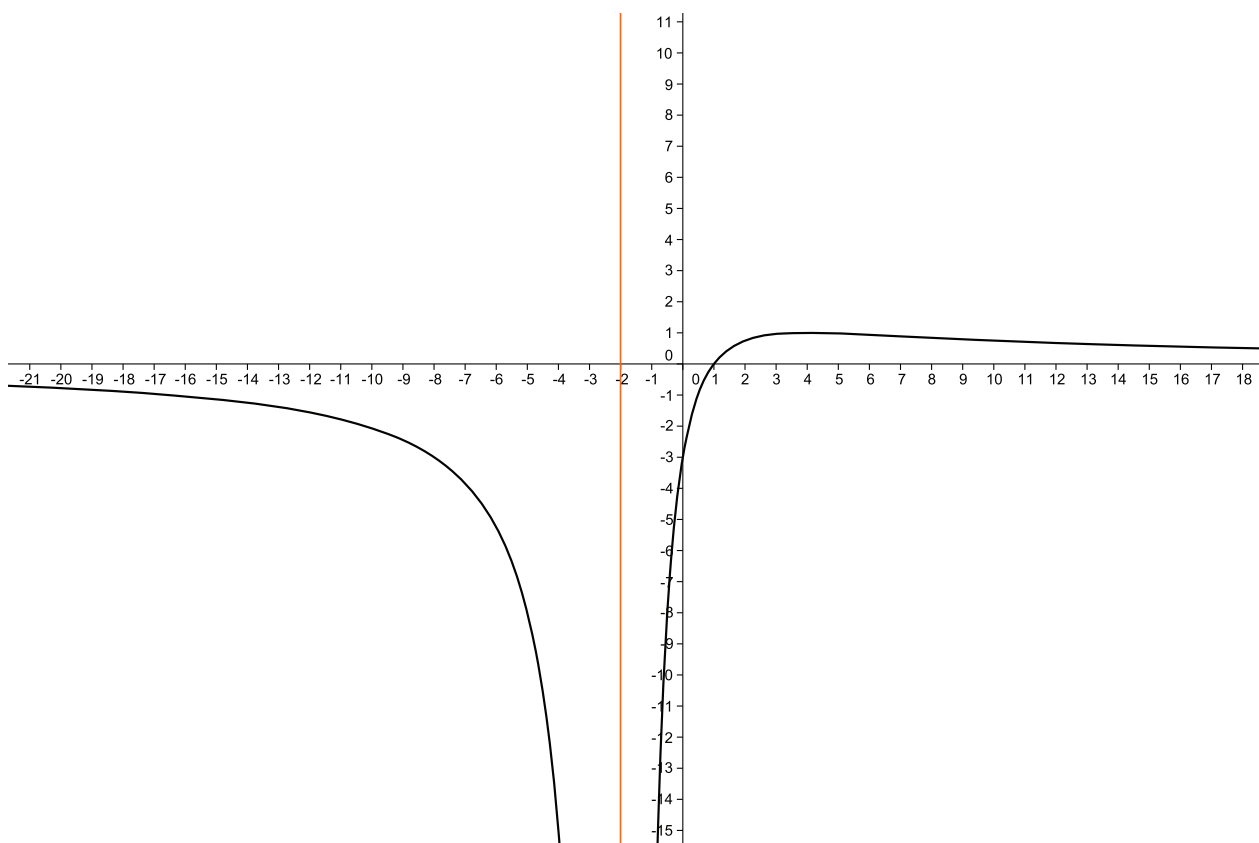
$$D_f = \{x \neq -2\} ;$$

la funzione presenta uno zero per $x = 1$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \Rightarrow 12x - 12 > 0 \Rightarrow \{x > 1\}$$

$$D > 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 > 0 \Rightarrow \{x < -2\} \cup \{x > -2\}$$

la funzione è positiva per $\{x > 1\}$. Poiché il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la retta $y = 0$ (asse x) è **asintoto orizzontale** per la funzione. La retta $x = -2$ è **asintoto verticale** per la funzione. Per $x > 1$ la funzione ha un massimo assoluto.



Esercizio 3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{3 - 3x^2}$$

Soluzione. Il dominio della funzione è

$$D_f = \{x \neq -1 \wedge x \neq 1\} ;$$

la funzione presenta due zeri per $x = 2$ e per $x = -2$. Studiamo ora il segno della funzione:

$$N > 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 > 0 \Rightarrow \{x < -2\} \cup \{x > 2\}$$

$$D > 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 > 0 \Rightarrow \{-1 < x < 1\}$$

la funzione è positiva per $\{-2 < x < -1\} \cup \{1 < x < 2\}$. Poiché il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore, la retta $y = -\frac{2}{3}$ è **asintoto orizzontale** per la funzione. Le rette $x = -1$ e $x = 1$ sono **asintoti verticali** per la funzione. Cerchiamo l'intersezione con l'asintoto orizzontale:

$$\frac{2x^2 - 8}{3 - 3x^2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{impossibile} ;$$

il grafico della funzione, perciò, non interseca la retta $y = -\frac{2}{3}$. In $x = 0$ la funzione presenta un massimo relativo.

