Francesco Daddi - 3 dicembre 2009

Esercizio svolto sulle applicazioni lineari

Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad;\quad f\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad;\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\quad;$$

vogliamo determinare la matrice A che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo.

Soluzione. Osserviamo prima di tutto che la f è definita su una base di $\mathbb{R}^3$, quindi è ben definita. Prendiamo ora i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ e cerchiamo di scriverli come combinazione lineare della base formata dai vettori $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ si trova che

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+8\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+(-7)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

applicando l'endomorfismo f alle seguenti uguaglianze e sfruttando la linearità di f troviamo:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(-3)\cdot f\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+2\cdot f\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+11\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=(-2)\cdot f\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+1\cdot f\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+8\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\cdot f\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+(-1)\cdot f\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+(-7)\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

quindi, sfruttando le informazioni del testo dell'esercizio, abbiamo:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(-3)\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 8\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-7)\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

svolgendo i calcoli troviamo:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\35\\-12\end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\25\\-9\end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-22\\8\end{pmatrix} \ .$$

La matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo è

$$A = \begin{pmatrix}-4 & -3 & 3\\35 & 25 & -22\\-12 & -9 & 8\end{pmatrix}$$

possiamo verificare il risultato ottenuto:

$$\begin{pmatrix}-4 & -3 & 3\\35 & 25 & -22\\-12 & -9 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad ;$$

$$\begin{pmatrix}-4 & -3 & 3\\35 & 25 & -22\\-12 & -9 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad ;$$

$$\begin{pmatrix}-4 & -3 & 3\\35 & 25 & -22\\-12 & -9 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \ .$$

Derivate e integrali

Francesco Daddi - 10 dicembre 2009

Sono assegnate le due applicazioni lineari $T : \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ *e* $S : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_3[t]$ *così definite:*

$$T : p(t) \longmapsto p'(t) \qquad ; \qquad S : \begin{cases} 1 \longmapsto t \\ t \longmapsto \dfrac{t^2}{2} \\ t^2 \longmapsto \dfrac{t^3}{3} \end{cases} .$$

a) Si scriva la matrice associata a T *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}_3[t]$ *in partenza e alla base canonica di* $\mathbb{R}_2[t]$ *in arrivo.*

b) Si scriva la matrice associata a S *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}_2[t]$ *in partenza e alla base canonica di* $\mathbb{R}_3[t]$ *in arrivo.*

c) Si scriva la matrice associata a $(T \circ S)$ *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}_2[t]$ *in partenza e in arrivo.*

d) Si scriva la matrice associata a $(S \circ T)$ *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}_3[t]$ *in partenza e in arrivo.*

Soluzione. a) Vediamo l'immagine mediante T dei polinomi che costituiscono la base canonica di $\mathbb{R}_3[t]$:

$$\begin{cases} 1 & \overset{T}{\longmapsto} & 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t & \overset{T}{\longmapsto} & 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t^2 & \overset{T}{\longmapsto} & 2\,t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t^3 & \overset{T}{\longmapsto} & 3\,t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3 \cdot t^2 \end{cases}$$

la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_3[t]$ in partenza e alla base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$ in arrivo è perciò la seguente:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

b) Poiché risulta

$$S : \begin{cases} 1 \longmapsto t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t \longmapsto \dfrac{t^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t^2 \longmapsto \dfrac{t^3}{3} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dfrac{1}{3} \cdot t^3 \end{cases}$$

la matrice associata a S rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$ in partenza e alla base canonica di $\mathbb{R}_3[t]$ in arrivo è la seguente:

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} . \tag{2}$$

c) **(Primo metodo)** Vediamo l'immagine mediante l'applicazione $(T \circ S)$ dei polinomi che formano la base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$:

$$\begin{cases} 1 \xmapsto{S} t \xmapsto{T} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t \xmapsto{S} \dfrac{t^2}{2} \xmapsto{T} t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ t^2 \xmapsto{S} \dfrac{t^3}{3} \xmapsto{T} t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \end{cases}$$

la matrice associata a $(T \circ S)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$ in partenza e in arrivo è perciò la seguente:

$$A_{T \circ S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(Secondo metodo) Facendo riferimento alle matrici (1) e (2), basta calcolare la matrice $A_T \cdot A_S$:

$$A_{T \circ S} = A_T \cdot A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Osservazione. L'applicazione lineare $(T \circ S)$ è l'identità sullo spazio $\mathbb{R}_2[t]$.

d) Vediamo l'immagine mediante l'applicazione $(S \circ T)$ dei polinomi che formano la base canonica di $\mathbb{R}_3[t]$:

$$\begin{cases} 1 \xmapsto{T} 0 \xmapsto{S} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t \xmapsto{T} 1 \xmapsto{S} t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t^2 \xmapsto{T} 2\,t \xmapsto{S} 2 \cdot \dfrac{t^2}{2} = t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t^3 \xmapsto{T} 3\,t^2 \xmapsto{S} 3 \cdot \dfrac{t^3}{3} = t^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 1 \cdot t^3 \end{cases}$$

la matrice associata a $(S \circ T)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_3[t]$ in partenza e in arrivo è perciò la seguente:

$$A_{S\circ T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(Secondo metodo) Facendo riferimento alle matrici (2) e (1), basta calcolare la matrice $A_S \cdot A_T$:

$$A_{S\circ T} = A_S \cdot A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Osservazione. L'applicazione lineare $(S \circ T)$ **non** è l'identità sullo spazio $\mathbb{R}_3[t]$.