Francesco Daddi - 20 dicembre 2009

Esercizi svolti sulle applicazioni lineari

Esercizio 1. *Si consideri la trasformazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *che ha come matrice associata, rispetto alla base* $\beta = \left\{(1,0,0)^T \ ; \ (0,1,0)^T \ ; \ (1,0,1)^T\right\}$ *in partenza e in arrivo, la matrice*

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice che rappresenta T *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *in partenza e in arrivo. Determinare anche l'immagine del vettore* $v = (2,0,1)^T$.

Soluzione (primo metodo). La matrice A che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

per calcolare l'immagine del vettore $(2,0,1)^T$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Soluzione (secondo metodo). Determiniamo le immagini dei vettori della base β assegnata:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a questo punto determino l'immagine del vettore $(0,0,1)^T$ come differenza delle immagini dei vettori $(1,0,1)^T$ e $(1,0,0)^T$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo ha per colonne le immagini dei vettori e_1, e_2, e_3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

per calcolare l'immagine del vettore $(2,0,1)^T$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Francesco Daddi - 21 dicembre 2009

Esercizi svolti sulle applicazioni lineari

Esercizio 2. *E' assegnata la trasformazione lineare* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ *tale che*

$$\mathit{ker}\,T=\left\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3 : x-2\,y+z=0\right\}\quad ;\quad T:(0,1,1)^T\longmapsto(-1,-3,0,1)^T\ .$$

Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alle basi canoniche.

<u>**Soluzione.**</u> Il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ avente equazione cartesiana $x-2\,y+z=0$ ha come base

$$\beta_{\ker T}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,$$

quindi, trattandosi del ker dell'applicazione, deve risultare necessariamente

$$T:\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad ;\quad T:\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ;$$

ora dal momento che

$$T:\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\ ,$$

per ottenere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alle basi canoniche, basta calcolare il seguente prodotto:

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-3\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-3\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-2\\1&-1&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&-6&3\\0&0&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}\ .$$

Francesco Daddi - 22 dicembre 2009

Esercizi svolti sulle applicazioni lineari

Esercizio 3. *Si determini un'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tale che*

$$\ker T = \operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left\{(2,2,3,3)^T, (1,4,4,1)^T\right\} \ .$$

Soluzione. L'esercizio può essere affrontato in più modi. Un metodo è il seguente: definiamo l'applicazione $T = L_A$ in questo modo (si osservi che stiamo definendo un'applicazione lineare su una base di $\mathbb{R}^4$):

$$L_A : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad L_A : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ;$$

$$L_A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad L_A : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

la matrice A si ottiene nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 4 & -\frac{14}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 & -\frac{43}{9} & \frac{1}{9} \\ 3 & 1 & -\frac{13}{9} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix} .$$

Si osservi che quella che abbiamo determinato è una delle infinite trasformazioni T che soddisfano le richieste dell'esercizio.

Tutte le trasformazioni che soddisfano le richieste si possono scrivere in questo modo:

$$L_A : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad L_A : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ;$$

$$L_A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad L_A : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

con la condizione che le ultime due immagini siano linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$$

si ottiene

$$L_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,\lambda_1 + \mu_1 & 2\,\lambda_2 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 2\,\lambda_1 + 4\,\mu_1 & 2\,\lambda_2 + 4\,\mu_2 \\ 0 & 0 & 3\,\lambda_1 + 4\,\mu_1 & 3\,\lambda_2 + 4\,\mu_2 \\ 0 & 0 & 3\,\lambda_1 + \mu_1 & 3\,\lambda_2 + \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\,\lambda_1 + \mu_1 & 2\,\lambda_2 + \mu_2 & -\frac{2\,\lambda_1 + \mu_1 + 20\,\lambda_2 + 10\,\mu_2}{9} & \frac{-10\,\lambda_1 - 5\,\mu_1 + 8\,\lambda_2 + 4\,\mu_2}{9} \\ 2\,\lambda_1 + 4\,\mu_1 & 2\,\lambda_2 + 4\,\mu_2 & -\frac{2\,\lambda_1 + 4\,\mu_1 + 20\,\lambda_2 + 40\,\mu_2}{9} & \frac{-10\,\lambda_1 - 20\,\mu_1 + 8\,\lambda_2 + 16\,\mu_2}{9} \\ 3\,\lambda_1 + 4\,\mu_1 & 3\,\lambda_2 + 4\,\mu_2 & -\frac{3\,\lambda_1 + 4\,\mu_1 + 30\,\lambda_2 + 40\,\mu_2}{9} & \frac{-15\,\lambda_1 - 20\,\mu_1 + 12\,\lambda_2 + 16\,\mu_2}{9} \\ 3\,\lambda_1 + \mu_1 & 3\,\lambda_2 + \mu_2 & -\frac{3\,\lambda_1 + \mu_1 + 30\,\lambda_2 + 10\,\mu_2}{9} & \frac{-15\,\lambda_1 - 5\,\mu_1 + 12\,\lambda_2 + 4\,\mu_2}{9} \end{pmatrix}.$$

Francesco Daddi - 23 dicembre 2009

Esercizi svolti sulle applicazioni lineari

Esercizio 4. *Data la trasformazione lineare* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$T : (x\,;\,y)^T \mapsto (x - y\,;\,-x + 3\,y)^T\,,$$

determinare la matrice associata a T *rispetto alla base* $\beta = \left\{(1\,;\,2)^T, (2\,;\,-2)^T\right\}$ *in partenza e in arrivo.*

Soluzione (primo metodo). La matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ in partenza e in arrivo è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\;;$$

per ottenere la matrice A' che rappresenta T rispetto alla base β in partenza e in arrivo basta eseguire il prodotto seguente:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} & -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{7}{6} & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Soluzione (secondo metodo). Calcoliamo le immagini dei vettori della base β:

$$T : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad T : \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}\;;$$

a questo punto determiniamo le coordinate delle due immagini rispetto alla base β:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

si trovano i seguenti risultati:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{4}{3} \\ \lambda_2 = -\dfrac{7}{6} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \mu_1 = -\dfrac{4}{3} \\ \mu_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

mettendo i risultati per colonna otteniamo la matrice cercata A':

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} & -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{7}{6} & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Università di Pisa - Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare 2009/2010

Esercitazione 11/11/2009

Esercizio 1. *Risolvere, al variare del parametro reale λ, il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x - 2\,y - z = \lambda \\ x - y - 3\,\lambda\,z = 0 \\ \lambda\,x + (\lambda - 1)\,y - z = \lambda \end{cases}$$

Esercizio 2. *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *si consideri l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

a) Si scriva $L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. *b) Si determini ker* (L_A) .

c) Si scrivano due basi diverse per ker (L_A) .

Esercizio 3. *Sono assegnati i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad ; \quad W = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

a) Dire se U *e* W *sono sommandi diretti di* $\mathbb{R}^4$.

b) Determinare dim $(U \cap W)$ *e scriverne una base.*

c) Scrivere, se esiste, un vettore $u \in \mathbb{R}^4$ *tale che* $u \in U \wedge u \notin W$.

Esercizio 4. *E' assegnata la retta* r *di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} 2\,x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} .$$

a) Si determini un vettore direttore di r.

b) Si determini un'equazione parametrica della retta s *parallela a* r *e passante per il punto* $P(-1, 8, 6)$.

Esercizio 5. *Si consideri la retta* r *dell'esercizio precedente.*

a) Si determini l'intersezione della retta r *con il piano di equazione* $x - 3\,y - 2\,z - 3 = 0$.

b) Si determini l'intersezione della retta r *con il piano di equazioni* $\begin{cases} x = 5\,t + 2\,s + 5 \\ y = t \\ z = t + s + 1 \end{cases}$.

Università di Pisa - Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare 2009/2010
Soluzioni esercitazione 11/11/2009

Esercizio 1. *Risolvere, al variare del parametro reale λ, il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x - 2\,y - z = \lambda \\ x - y - 3\,\lambda\, z = 0 \\ \lambda\, x + (\lambda - 1)\, y - z = \lambda \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo con il metodo di Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -3\,\lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda-1) & -1 & \lambda \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & (1-3\,\lambda) & -\lambda \\ 0 & (3\,\lambda-1) & (\lambda-1) & \lambda-\lambda^2 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & (1-3\,\lambda) & -\lambda \\ 0 & 0 & (9\,\lambda^2-5\,\lambda) & 2\,\lambda^2 \end{array}\right].$$

Ora dobbiamo discutere l'elemento di posto $3,3$ (terza riga e terza colonna): $(9\,\lambda^2 - 5\,\lambda) = \lambda(9\,\lambda - 5)$: i valori "critici" del parametro sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{5}{9}$. I casi sono allora i seguenti:

- se $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq \frac{5}{9}$ il sistema ha un'unica soluzione: $\begin{cases} x = \dfrac{3\,\lambda(\lambda+1)}{9\,\lambda-5} \\ y = \dfrac{3\,\lambda(1-\lambda)}{9\lambda-5} \\ z = \dfrac{2\,\lambda}{9\lambda-5} \end{cases}$

- se $\lambda = 0$ il sistema ha infinite soluzioni: $\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

- se $\lambda = \frac{5}{9}$ il sistema è impossibile.

Esercizio 2. *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *si consideri l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

a) Si scriva $L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. *b) Si determini ker* (L_A) .

c) Si scrivano due basi diverse per ker (L_A) .

Soluzione. a)

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \\ -x_2 + 2\,x_3 + x_4 \\ -x_1 - 3\,x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix} .$$

b) Per determinare il nucleo (Ker) di L_A dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0 \\ -x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 3\,x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

seguendo l'eliminazione di Gauss troviamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

abbiamo dunque due parametri liberi: $x_3 = t$ e $x_4 = s$. Per ottenere le soluzioni basta portare i termini contenenti t e s a destra:

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = -3\,t \\ -x_2 = -2\,t - s \end{cases}$$

a questo punto si risolve rispetto a x_1 e x_2:

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = -3\,t \\ -x_2 = -2\,t - s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (2\,t + s) = -3\,t \\ x_2 = 2\,t + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7\,t - 2\,s \\ x_2 = 2\,t + s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\,t - 2\,s \\ 2\,t + s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

una base del $\ker(L_A)$ è costituita dai due vettori appena scritti:

$$\beta_{\ker(L_A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

c) Questo punto può essere risolto in infiniti modi; ad esempio possiamo considerare la somma e la differenza dei due vettori trovati:

$$\beta'_{\ker(L_A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} ;$$

oppure possiamo considerare semplicemente dei multipli non nulli dei due vettori di β:

$$\beta_{\ker(L_A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Esercizio 3. *Sono assegnati i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad ; \quad W = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

a) Dire se U *e* W *sono sommandi diretti di* $\mathbb{R}^4$*.*

b) Determinare dim $(U \cap W)$ *e scriverne una base.*

c) Scrivere, se esiste, un vettore $u \in \mathbb{R}^4$ *tale che* $u \in U \wedge u \notin W$*.*

Soluzione. a)-b) Cerchiamo l'intersezione $U \cap W$; un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ che appartine all'intersezione $U \cap W$ deve essere tale che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

uguagliando le due espressioni otteniamo:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui, portando tutto a sinistra

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite a_1, a_2, b_1, b_2, b_3:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 - b_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 - b_2 = 0 \\ -3\,b_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

risolvendo con l'eliminazione di Gauss otteniamo

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

preso $b_2 = t$ come parametro libero il sistema si risolve nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = t \\ a_2 - b_1 = 2\,t \\ b_1 = -2\,t \\ -3\,b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ -2\,t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

gli asterischi (*) stanno ad indicare che non è necessario determinare a_1 e a_2, dal momento che bastano i coefficienti b_j. Sostituendo $b_1 = -2\,t$, $b_2 = t$, $b_3 = 0$ nell'espressione iniziale otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2\,t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui, semplificando, ricaviamo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow U \cap W = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Dalla formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \quad \Rightarrow \quad \dim(U+W) = 2+3-1 = 4\ ,$$

da cui, chiaramente, otteniamo $U + W = \mathbb{R}^4$. I sottospazi U e W non sono sommandi diretti.

c) Un vettore $u \in \mathbb{R}^4$ tale che $u \in U \wedge u \notin W$ è, ad esempio, il secondo vettore della base di U, ovvero $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. In generale, tutti i vettori $u \in \mathbb{R}^4$ tale che $u \in U \wedge u \notin W$ possono essere scritti in questa forma:

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda \neq 0\ .$$

Esercizio 4. *E' assegnata la retta r di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} 2\,x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad .$$

a) Si determini un vettore direttore di r.

b) Si determini un'equazione parametrica della retta s parallela a r e passante per il punto $P(-1, 8, 6)$.

Soluzione. a) Cerchiamo le soluzioni del sistema scritto nel testo dell'esercizio con l'eliminazione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

prendiamo $z = t$ come parametro libero e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = t \\ -3\,y = -3\,t + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + \left(-\dfrac{1}{3} + t\right) = t \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \end{cases}$$

una parametrizzazione della retta è quindi la seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

un vettore direttore della retta r è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Basta considerare la retta di equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5. *Si consideri la retta r dell'esercizio precedente.*

a) Si determini l'intersezione della retta r con il piano di equazione $x - 3\,y - 2\,z - 3 = 0$.

b) Si determini l'intersezione della retta r con il piano di equazioni $\begin{cases} x = 5\,t + 2\,s + 5 \\ y = t \\ z = t + s + 1 \end{cases}$.

Soluzione. a) Per determinare l'intersezione tra la retta e il piano possiamo procedere in più modi; il metodo più semplice consiste nel sostituire alle variabili x, y, z dell'equazione cartesiana del piano le espressioni contenute nelle equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x - 3\,y - 2\,z - 3 = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3} + t \right) - 2\,t - 3 = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

il punto di intersezione ha perciò coordinate $\left(\dfrac{1}{3} \, ; \, -\dfrac{2}{3} \, ; \, -\dfrac{1}{3} \right)$.

b) Ci sono più metodi anche in questo caso; scegliamo il più semplice. Determiniamo l'equazione cartesiana del piano eliminando i parametri t, s:

$$\begin{cases} x = 5\,t + 2\,s + 5 \\ y = t \\ z = t + s + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\,y + 2\,s + 5 \\ y = t \\ z = y + s + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\,y + 2\,(z - y - 1) + 5 \\ y = t \\ s = z - y - 1 \end{cases}$$

la prima equazione, semplificata, è $x - 3\,y - 2\,z - 3 = 0$: abbiamo ritrovato il piano del punto precedente. E' ovvio che il punto di intersezione è sempre $\left(\dfrac{1}{3} \, ; \, -\dfrac{2}{3} \, ; \, -\dfrac{1}{3} \right)$.

Osservazione. Si trova lo stesso risultato risolvendo il sistema seguente (equazione cartesiana retta + equazione cartesiana piano):

$$\begin{cases} 2\,x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 3\,y - 2\,z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\text{le soluzioni sono } x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{2}{3},\ z = -\frac{1}{3}\right),$$

oppure il sistema (equazione cartesiana retta + equazione parametrica piano)

$$\begin{cases} 2\,x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x = 5\,t + 2\,s + 5 \\ y = t \\ z = t + s + 1 \end{cases} \qquad \left(\text{le soluzioni sono } x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{2}{3},\ z = -\frac{1}{3},\ t = -\frac{2}{3},\ s = -\frac{2}{3}\right),$$

oppure il sistema (equazione parametrica retta + equazione parametrica piano)

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} + t' \\ z = t' \\ x = 5\,t + 2\,s + 5 \\ y = t \\ z = t + s + 1 \end{cases}$$

$$\left(\text{le soluzioni sono } x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{2}{3},\ z = -\frac{1}{3},\ t' = -\frac{1}{3},\ t = -\frac{2}{3},\ s = -\frac{2}{3}\right).$$

Università di Pisa - Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare 2009/2010

Esercitazione 2/12/2009

Esercizio 1. *Sono assegnate le matrici seguenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; ;$$

a) Si determini la matrice $ABCD$.
b) Quali prodotti (con solo due matrici) si possono fare?

Esercizio 2. *Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici 2×2.*
a) Dimostrare che $tr(AB) = tr(BA)$.
b) Dimostrare che non esistono A, B tali che $AB - BA = I_2$ (dove con I_2 indichiamo la matrice identica 2×2).

Esercizio 3. *Sono assegnate le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definite:*

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - y \\ y - 2\,z \\ x + y - z \end{pmatrix} \; ; \; S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -z \\ x - z \\ x + y - z \end{pmatrix} .$$

a) Si scriva l'applicazione $S \circ T$.
b) $S \circ T$ è un isomorfismo?
c) Si determini l'immagine tramite $S \circ T$ del vettore $3\,e_1 + e_2$.
d) Trovare, se esiste, l'immagine tramite $(S \circ T)^{-1}$ del vettore $e_1 + e_2 - e_3$.

Esercizio 4. *Sono assegnate le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ e $S : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ così definite:*

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to (x - y) + (y - 2\,z)t + (x + y - z)t^2 \quad ; \quad S : \begin{cases} 1 \to e_2 + e_3 \\ t \to e_3 \\ t^2 \to -e_1 - e_2 - e_3 \end{cases} .$$

a) Si determini l'espressione generale dell'applicazione $T \circ S$.
b) Si determini l'espressione generale dell'applicazione $S \circ T$.
c) Si determini $(T \circ S)(1 - t^2)$.
d) Si determini $(S \circ T)(e_3 + 4\,e_2 - 2\,e_1)$.
e) Si determini l'espressione generale dell'applicazione $(T \circ S)^{-1}$.

Università di Pisa - Ingegneria Meccanica
Geometria e Algebra Lineare 2009/2010

Soluzione esercitazione 2/12/2009

Esercizio 1. *Sono assegnate le matrici seguenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; ;$$

a) Si determini la matrice $ABCD$.
b) Quali prodotti (con solo due matrici) si possono fare?

Soluzione. a) Sfruttando l'associatività ricaviamo:

$$ABCD = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -7 \\ -18 & -3 \end{pmatrix} .$$

b) I prodotti che possono essere fatti sono i seguenti:

$$A^2 \;\; ; \;\; AB \;\; ; \;\; BC \;\; ; \;\; BD \;\; ; \;\; C^2 \;\; ; \;\; CD \;\; ; \;\; DA \;\; ; \;\; DB \, .$$

Esercizio 2. *Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici 2×2.*
a) Dimostrare che $tr(AB) = tr(BA)$.
b) Dimostrare che non esistono A, B tali che $AB - BA = I_2$ (dove con I_2 indichiamo la matrice identica 2×2).

Soluzione. a) Prendiamo due matrici generiche

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

calcoliamo AB e BA:

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}$$

scriviamo ora la traccia delle matrici ottenute:

$$tr(AB) = a_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1d_2 \quad ; \quad tr(BA) = a_2a_1 + b_2c_1 + c_2b_1 + d_2d_1$$

non è difficile verificare che $tr(AB) = tr(BA)$.

b) Dal punto a) sappiamo che $tr(AB) = tr(BA)$, quindi, poiché la traccia è lineare, abbiamo:

$$tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB) - tr(AB) = 0 \, ;$$

se, per assurdo, esistessero due matrici A, B tali che $AB - BA = I_2$ avremmo

$$tr(AB - BA) = tr(I_2) = 2$$

ovvero un'evidente contraddizione. □

Esercizio 3. *Sono assegnate le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definite:*

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - 2\,z \\ x + y - z \end{pmatrix} \quad ; \quad S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -z \\ x - z \\ x + y - z \end{pmatrix} .$$

a) Si scriva l'applicazione $S \circ T$.
b) $S \circ T$ è un isomorfismo?
c) Si determini l'immagine tramite $S \circ T$ del vettore $3\,e_1 + e_2$.
d) Trovare, se esiste, l'immagine tramite $(S \circ T)^{-1}$ del vettore $e_1 + e_2 - e_3$.

Soluzione. a) Le due applicazioni S e T possono essere scritte nel modo seguente (le matrici che seguono rappresentano le due applicazioni rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo):

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ;$$

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Scriviamo ora l'applicazione $(S \circ T)$:

$$S \circ T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

svolgendo il prodotto delle due matrici abbiamo:

$$S \circ T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ovvero

$$S \circ T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x-y+z \\ -2\,y+z \\ -y-z \end{pmatrix} .$$

b) Riduciamo la matrice che rappresenta $(S \circ T)$ con Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ci sono tre pivot non nulli, quindi si tratta di un isomorfismo.

c) Calcoliamo l'immagine del vettore $3\,e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$S \circ T : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -4\,e_1 - 2\,e_2 - e_3 .$$

d) <u>Primo metodo.</u> Si tratta di risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x-y+z=1 \\ -2\,y+z=1 \\ -y-z=-1 \end{cases}$$

con Gauss abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

risolvendo il sistema triangolare ricaviamo:

$$\begin{cases} -x-y+z=1 \\ -y-z=-1 \\ 3\,z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} ;$$

in definitiva, l'immagine tramite $(S \circ T)^{-1}$ del vettore $e_1 + e_2 - e_3$ è il vettore e_3.

<u>Secondo metodo</u> (sconsigliato per i calcoli). Determiniamo $(S \circ T)^{-1}$ calcolando l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

quindi possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

l'applicazione $(S \circ T)^{-1}$ ha perciò la seguente espressione:

$$(S \circ T)^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + \dfrac{2}{3}\,y - \dfrac{1}{3}\,z \\ -\dfrac{1}{3}\,y - \dfrac{1}{3}\,z \\ \dfrac{1}{3}\,y - \dfrac{2}{3}\,z \end{pmatrix}$$

calcolando l'immagine del vettore $e_1 + e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ troviamo:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3\,.$$

Esercizio 4. *Sono assegnate le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ e $S : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definite:*

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (x - y) + (y - 2\,z)t + (x + y - z)t^2 \quad ; \quad S : \begin{cases} 1 \longmapsto e_2 + e_3 \\ t \longmapsto e_3 \\ t^2 \longmapsto -e_1 - e_2 - e_3 \end{cases} .$$

a) Si determini l'espressione generale dell'applicazione $T \circ S$.

b) Si determini l'espressione generale dell'applicazione $S \circ T$.
c) Si determini $(T \circ S)(1 - t^2)$.
d) Si determini $(S \circ T)(e_3 + 4\,e_2 - 2\,e_1)$.
e) Si determini l'espressione generale dell'applicazione $(T \circ S)^{-1}$.

Soluzione. a) Calcoliamo le immagini dei polinomi della base canonica dello spazio $\mathbb{R}_2[t]$:

$$\begin{cases} 1 & \xmapsto{S} & e_2 + e_3 & \xmapsto{T} & T(e_2) + T(e_3) = (-1 + t + t^2) + (-2\,t - t^2) = -1 - t \\ t & \xmapsto{S} & e_3 & \xmapsto{T} & T(e_3) = -2\,t - t^2 \\ t^2 & \xmapsto{S} & -e_1 - e_2 - e_3 & \xmapsto{T} & -T(e_1) - T(e_2) - T(e_3) = -(1 + t^2) - (-1 + t + t^2) - (-2\,t - t^2) = t - t^2 \end{cases}$$

l'espressione generale dell'applicazione $(T \circ S)$ è la seguente:

$$T \circ S \,:\, a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \longmapsto a_0(-1 - t) + a_1(-2\,t - t^2) + a_2(t - t^2)$$

ovvero

$$T \circ S \,:\, a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \longmapsto -a_0 + (-a_0 - 2\,a_1 + a_2)t + (-a_1 - a_2)t^2$$

la matrice che rappresenta $(T \circ S)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$ in partenza e in arrivo è la seguente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) Calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} e_1 & \xmapsto{T} & 1 + t^2 & \xmapsto{S} & S(1) + S(t^2) = (e_2 + e_3) + (-e_1 - e_2 - e_3) = -e_1 \\ e_2 & \xmapsto{T} & -1 + t + t^2 & \xmapsto{S} & -S(1) + S(t) + S(t^2) = -(e_2 + e_3) + e_3 + (-e_1 - e_2 - e_3) = -e_1 - 2\,e_2 - e_3 \\ e_3 & \xmapsto{T} & -2\,t - t^2 & \xmapsto{S} & -2S(t) - S(t^2) = -2\,e_3 - (-e_1 - e_2 - e_3) = e_1 + e_2 - e_3 \end{cases}$$

la matrice che rappresenta l'applicazione $(S \circ T)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo è la seguente:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

e coincide con la matrice studiata nell'esercizio 3. L'espressione generale per $S \circ T$ è

$$S \circ T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - y + z \\ -2\,y + z \\ -y - z \end{pmatrix}.$$

c) Per determinare $(T \circ S)(1 - t^2)$ basta sfruttare la matrice associata (1):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi $(T \circ S)(1 - t^2) = -1 - 2\,t + t^2$.

d) Per determinare $(S \circ T)(e_3 + 4\,e_2 - 2\,e_1)$ è sufficiente passare dalla matrice (2):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} ,$$

quindi $(S \circ T)(e_3 + 4\,e_2 - 2\,e_1) = -e_1 - 7\,e_2 - 5\,e_3$.

e) Determiniamo l'inversa della matrice (1):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

l'espressione per l'applicazione $(T \circ S)^{-1}$ è la seguente:

$$(T \circ S)^{-1} : a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \longmapsto -a_0 + \left(\frac{1}{3}\,a_0 - \frac{1}{3}\,a_1 - \frac{1}{3}\,a_2\right) t + \left(-\frac{1}{3}\,a_0 + \frac{1}{3}\,a_1 - \frac{2}{3}\,a_2\right) t^2 .$$