Esercizi sulla diagonalizzazione di matrici

Francesco Daddi - marzo 2010

Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili su $\Re$:

1. $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 0$ (m.a.=m.g.=2) e $\lambda_2 = 6$ (m.a.=m.g.=1)).

   (si osservi che il nucleo della matrice A coincide con l'autospazio relativo all'autovalore nullo.)

2. $B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (triangolabile ma non diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 1$ (m.a. = 2 > 1=m.g.) e $\lambda_2 = -1$ (m.a.=m.g.=1)) .

3. $C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (non triangolabile) .

4. $E := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = -1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_2 = 0$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_3 = 1$ (m.a.=m.g.=1)) .

5. $F := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = -2$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$ (m.a.=m.g.=1)) .

6. $G := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (non triangolabile) .

7. $H := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = -1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_2 = 2$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_3 = 4$ (m.a.=m.g.=1)) .

8. $L := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (triangolabile ma non diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 2$ (m.a. = 2 > 1=m.g.) e $\lambda_2 = -3$ (m.a.=m.g.=1)) .

9. $M := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_2 = -2$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_3 = -3$ (m.a.=m.g.=1)) .

10. $N := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_2 = -1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_3 = -3$ (m.a.=m.g.=1)) .

11. $R := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ (triangolabile ma non diagonalizzabile con autovalore $\lambda_1 = 0$ (m.a. = 3 > 2=m.g.) ; la matrice è ***nilpotente***) .

12. $S := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ (diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1 = 1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_2 = -1$ (m.a.=m.g.=1), $\lambda_3 = 2$ (m.a.=m.g.=1)) .

13. $T := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (triangolabile ma non diagonalizzabile con autovalore $\lambda_1 = 1$ (m.a.=3>2=m.g.)) .

14. $U := \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (triangolabile ma non diagonalizzabile con autovalore $\lambda_1 = -2$ (m.a.=3>1=m.g.)).

Esercizi su autovalori e autovettori

Ingegneria meccanica 2008/2009

Esercizio 1. *Dire se l'endomorfismo* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una base di autovettori.

Esercizio 2. *Dire se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. *Dire se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. *Studiare anche la diagonalizzabilità su* $\mathbb{C}$.

Esercizio 4. *Sappiamo che un autovalore della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è $\lambda = -1$. *Dire se la matrice è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$. *In caso affermativo si trovi una base di autovettori.*

Esercizio 5. *Dire se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 15 & -7 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. *In caso affermativo si trovi una base di autovettori.*

Esercizio 6. *Si studi la diagonalizzabilità su* $\mathbb{C}$ *della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} .$$

Se la matrice è diagonalizzabile, si trovi una base di autovettori.

Esercizio 7. *Si studi la diagonalizzabilità su* $\mathbb{C}$ *della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se la matrice è diagonalizzabile, si trovi una base di autovettori.

Esercizio 8. *Dire se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 6 & -15 & -6 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$*. In caso affermativo si trovi una base di autovettori.*

Esercizio 9. *Dire se le due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

sono simili.

Esercizio 10. *Dire se le due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sono simili. Sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$*? E su* $\mathbb{C}$*?*

Esercizio 11. *Per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *l'endomorfismo*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$*?*

Esercizio 12. *Si studi al variare del parametro reale* k *la diagonalizzabilità su* $\mathbb{R}$ *della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 13. *Studiare la diagonalizzabilità su* $\mathbb{R}$ *della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 14. *Per quali valori del parametro reale* t *l'endomorfismo*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+2\,t & 2 \\ 1 & -2\,t & 0 \\ 1 & 1 & -2\,t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ammette l'autovalore 1 *? Dire se, in tal caso, l'endomorfismo risulta diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$, *determinando una base di autovettori.*

Esercizio 15. *Determinare i valori di* $h \in \mathbb{R}$ *per cui il vettore* $(3\,,\,2-k\,,\,3)^T$ *è autovettore dell'endomorfismo*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4-2\,k & 4 \\ k & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\,.$$

Esercizio 16. *Dire se esistono autovettori comuni per le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & -13 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 0 \\ -12 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\,.$$

Esercizio 17. *Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *dell'endomorfismo* T *tale che i vettori* $(1\ 2\ -1)^T$, $(1\ 1\ 0)^T$ *e* $(-3\ 2\ -6)^T$ *siano autovettori relativi, rispettivamente, agli autovalori* $3, -2, 4$.

Esercizio 18. *Determinare un'applicazione lineare* T *tale che:*
abbia autovalori 1 *e* -1;
$V_{\lambda=-1} = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$; $V_{\lambda=1} = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x=y=z\}$.